

PC6 notée

Sujet proposé par Stéphane Graham-Lengrand et Samuel Mimram et Bruno Salvy
(corrigé)

Cet énoncé comporte trois parties indépendantes et qui pourront être résolues dans n'importe quel ordre. Dans chaque partie, on pourra, pour répondre à une question, admettre les résultats dont on demande la démonstration aux questions *précédentes*. Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir la note maximale. Les correcteurs vous remercient d'avance d'écrire lisiblement.

Dans l'ensemble du sujet, on appellera *théorie égalitaire* une théorie dont la signature possède le symbole de relation $=$ (d'arité 2) et dont les axiomes incluent ceux de la théorie de l'égalité.

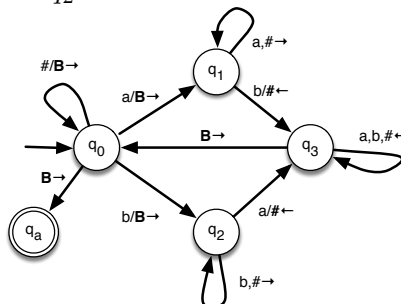
On admettra dans le sujet que le théorème de compacité est valide pour toute théorie, que sa signature soit dénombrable ou pas.

1 Décidabilité

On note \mathcal{L} le langage sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ constitué des mots qui contiennent autant de a que de b .

Question 1.1. Donner une machine de Turing explicite permettant de reconnaître le langage \mathcal{L} . [Indication : on peut étendre l'alphabet de travail, et 6 états suffisent en comptant celui de rejet (mais les machines correctes qui ont plus d'états seront bien sûr acceptées).]

Solution : Une telle machine est représentée ci-dessous. Elle repère la première lettre du mot, l'efface, et va chercher la lettre qui lui correspond (un a si c'est b et un b si c'est un a) pour la remplacer par une nouvelle lettre $\#$. Ensuite, elle retourne au début du mot, y efface les éventuels $\#$ initiaux, et recommence. Elle termine en acceptant si elle atteint un blanc, qui est donc à la fin du mot. Elle termine en refusant si aucun b n'est trouvé dans l'état q_1 , et symétriquement, si aucun a n'est trouvé dans l'état q_2 .



□

Question 1.2. Dire si le problème suivant est décidable : déterminer si une machine de Turing M reconnaît au moins un mot de \mathcal{L} . Argumentez votre réponse.

Solution : La propriété n'est pas triviale : le langage $\{a\}$ ne la possède pas, et le langage $\{ab\}$ la possède. Le théorème de Rice permet donc de conclure à l'indécidabilité de ce problème. □

Question 1.3. Dire si le problème suivant est décidable : déterminer si une machine de Turing M ne reconnaît que des mots de longueur 1271 et reconnaît au moins un mot de \mathcal{L} . Argumentez votre réponse.

Solution : Le théorème de Rice ne s'applique pas ! En effet, la propriété est triviale puisqu'aucun mot de longueur impaire ne peut contenir autant de a que de b . Aucune machine n'a donc la propriété cherchée, qui est donc décidable. \square

Question 1.4. Dire si le problème suivant est décidable : étant donné un couple $(\langle M \rangle, w)$ où l'alphabet de travail de M est $\Sigma = \{0, 1\}$, déterminer si la machine de Turing M accepte le mot w sans jamais que le sous-mot 11 n'apparaisse sur le ruban. Argumentez votre réponse.

Solution : Le problème est indécidable, ce que l'on prouve en y réduisant le problème de l'arrêt. Pour cela, étant donné un couple $(\langle M \rangle, w)$, on construit de façon calculable une nouvelle machine M' et un nouveau mot w' , de telle sorte que jamais 11 n'apparaît sur le ruban lorsque M' est exécuté sur w' , et tels que $(\langle M \rangle, w)$ termine si et seulement si $(\langle M' \rangle, w')$ termine. L'idée est de travailler sur un alphabet composé des "lettres" $0\#$ et $1\#$.

Dans un premier temps, on commence par recopier l'entrée en remplaçant chaque 0 de w par $0\#$ et chaque 1 par $1\#$. Par exemple, on peut remplacer le premier blanc suivant w par un caractère ' \star ', puis effectuer des allers-retours pour aller chercher le caractère initial de w , le remplacer par un blanc, puis aller écrire à la fin du ruban soit $0\#$ si le caractère était 0 soit $1\#$ si c'était un 1. Cette phase s'arrête lorsque le caractère ' \star ' est le premier caractère du mot, qu'il n'y a plus qu'à effacer.

Ensuite, M' est composé d'une transformation de la machine M où chaque transition de la forme $\delta(q_i, \ell) = (q_j, m, a)$ avec $a \in \{\rightarrow, \leftarrow\}$ est remplacée par

$$\delta(q_i, \ell) = (q_{i,\ell}, m, a), \quad \delta(q_{i,\ell}, \#) = (q_j, \#, a), \quad \delta(q_{i,\ell}, \mathbf{B}) = (q_j, \#, a) :$$

pour chaque transition et chaque lettre, on insère un état intermédiaire dont la seule fonction est d'écrire un $\#$ s'il n'y est pas déjà. Ainsi, la machine M' n'utilise que des cases de même parité sur le ruban, les autres étant remplies par des $\#$. Aucun 11 n'apparaît, et la machine termine bien sur les mêmes mots que M . Si le problème était décidable, on pourrait déterminer quand la machine M' s'arrête et ainsi résoudre le problème de l'arrêt. \square

2 Graphes

Question 2.1. Donner une signature et une théorie égalitaire formée d'un nombre fini d'axiomes, et dont les modèles égalitaires sont les graphes non-dirigés, sans boucle, dont l'un des sommets a exactement un voisin et tous les autres sommets ont exactement deux voisins.

Solution : La signature de la théorie ne contient ni constante ni fonction, mais l'égalité et une relation R qui exprime l'existence d'une arête entre deux sommets. On prend d'abord les axiomes de l'égalité. Ensuite, pour que les graphes modèles soient non-dirigés, on ajoute la symétrie de cette relation :

$$\forall x \forall y R(x, y) \Rightarrow R(y, x).$$

Dire qu'il n'y a pas de boucle s'écrit

$$\forall x \neg R(x, x).$$

Enfin, un sommet a exactement un voisin alors que tous les autres en ont deux s'exprime par un axiome supplémentaire :

$$\exists x ((\forall y \forall z R(x, y) \wedge R(x, z) \Rightarrow (y = z)) \wedge (\forall y \neg (y = x) \Rightarrow \exists z \exists t (z \neq t) \wedge R(y, z) \wedge R(y, t) \wedge \forall u R(y, u) \Rightarrow (u = z) \vee (u = t))).$$

□

Question 2.2. *Montrer que cette théorie n'a pas de modèle fini.*

Solution : Soit n le nombre de sommets d'un tel graphe et e son nombre d'arêtes. Chaque arête ayant deux extrémités, compter le nombre d'arêtes par sommet donne

$$2e = 1 + 2(n - 1),$$

équation dont le membre gauche est pair et le membre droit pair, une contradiction. □

3 Ordres et ordres totaux

Un *ensemble ordonné* (X, \leq) est un ensemble X muni d'une relation d'*ordre*, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et antisymétrique. Un ordre est dit *total* lorsque toute paire d'éléments est comparable (on parle alors d'*ensemble totalement ordonné*).

Question 3.1. *Donnez une théorie égalitaire \mathcal{T} dont les modèles égalitaires sont les ensembles ordonnés. Comment modifier cette théorie pour obtenir les ensembles totalement ordonnés ?*

Solution : On considère la signature $\Sigma = (\emptyset, \emptyset, \{=, \leq\})$ et on ajoute aux axiomes de l'égalité les axiomes

$$\begin{aligned} \forall x, x &\leq x \\ \forall x \forall y \forall z, (x &\leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z \\ \forall x \forall y, (x &\leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pour les ordres totaux il suffit d'ajouter l'axiome

$$\forall x \forall y, x \leq y \vee y \leq x$$

□

Une *extension* d'un ensemble ordonné (X, \leq) est un ordre \preceq sur X tel que $a \leq b$ implique $a \preceq b$ pour toute paire d'éléments a et b de X . Une *linéarisation* de (X, \leq) est une extension par un ordre total.

Question 3.2. *Montrez par récurrence que tout ensemble ordonné fini admet une linéarisation.*

Solution : Considérons un ensemble ordonné (X, \leq) . On procède par récurrence sur le cardinal de $L = \{(a, b) \in X^2 \mid a \not\leq b \text{ et } b \not\leq a\}$. Si L est vide l'ensemble (X, \leq) est totalement ordonné. Sinon, considérons une paire $(a_0, b_0) \in L$ et l'ordre \leq' sur X défini par $a \leq' b$ si et seulement si $a \leq b$ ou $a \leq a_0$ et $b_0 \leq b$. Par hypothèse de récurrence, (X, \leq') admet une linéarisation, et celle-ci est aussi une linéarisation de (X, \leq) . □

Question 3.3. *Étant donné un ensemble ordonné (X, \leq) , donnez une signature et une théorie égalitaire dont les modèles égalitaires sont les ensembles ordonnés (Y, \preceq) tel qu'il existe une injection ϕ de X vers Y et pour tous x et y dans X , $x \leq y$ implique $\phi(x) \preceq \phi(y)$.*

Solution : On considère la signature avec $\{c_a \mid a \in X\}$ comme constantes, pas de symbole de fonction et $\{=, \leq\}$ comme symboles de relations, et la théorie qui contient

- les axiomes des ordres (question 3.1),

— les axiomes

$$\neg(c_a = c_b)$$

pour $(a, b) \in X^2$ avec $a \neq b$, et

— les axiomes

$$c_a \leq c_b$$

pour $(a, b) \in X^2$ avec $a \leq b$.

L'interprétation des constantes dans un modèle \mathfrak{M} nous fournit un ensemble isomorphe à X et l'on a $c_a^{\mathfrak{M}} \leq c_b^{\mathfrak{M}}$ lorsque $a \leq b$, i.e. l'ensemble $Y' = \{c_a^{\mathfrak{M}} \mid a \in X\}$ permet de conclure. \square

Question 3.4. *En vous inspirant de la construction de la question précédente, montrez que tout ensemble ordonné (pas nécessairement fini) admet une linéarisation.*

Solution : Supposons donné un ensemble ordonné (X, \leq) . On considère la signature avec

$$\mathcal{C} = \{c_a \mid a \in X\}$$

$$\mathcal{F} = \emptyset$$

$$\mathcal{R} = \{=, \leq\}$$

et la théorie constituée

- des axiomes des ordres totaux (question 3.1),
- des axiomes $\neg(c_a = c_b)$ pour $a \neq b$,
- des axiomes $c_a \leq c_b$ pour $a \leq b$.

En utilisant le théorème de compacité, il suffit de montrer qu'une partie finie quelconque de cette théorie admet un modèle. Cette partie ne fait intervenir qu'un sous-ensemble fini $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ des constantes et un modèle est alors une extension linéaire du sous-ensemble $X' = \{a \in X \mid c_a \in \mathcal{C}'\}$ de X (les constantes de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ pouvant être interprétées de façon arbitraire). Une telle extension existe par la question 3.2. \square

4 Théorème de Nelson-Oppen

Motivation (qu'il est inutile de lire pour répondre aux questions). *Tout l'enjeu du raisonnement mathématique est de déterminer l'existence de modèles. On essaye si possible de réduire de tels problèmes à des problèmes plus simples. Par exemple, chercher s'il existe des rationnels x et y et une fonction $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tels que $f(2x) \neq f(3y)$ repose sur la théorie \mathcal{T}_1 de l'arithmétique et la théorie \mathcal{T}_2 de l'égalité sur une signature dont le seul symbole de fonction est f . Ce problème est équivalent à l'existence d'un modèle des formules $f(c_x) = f(c_y)$, $c_x = 2x$, $c_y = 3y$, où l'on a introduit des constantes c_x et c_y pour "nommer" les sous-termes $2x$ et $3y$. L'intérêt est qu'on a alors un problème $I_1 = \{c_x = 2x, c_y = 3y\}$ dans la théorie de l'arithmétique et un problème $I_2 = \{f(c_x) = f(c_y)\}$ dans la théorie de l'égalité, qui n'ont rien d'autre en commun que les constantes c_x et c_y que l'on a introduites, en nombre fini. Cet exercice permet de résoudre des problèmes impliquant deux théories \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , une fois écrits sous cette forme séparée.*

Étant donné deux signatures du premier ordre $\Sigma_1 = (\mathcal{C}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{R}_1)$ et $\Sigma_2 = (\mathcal{C}_2, \mathcal{F}_2, \mathcal{R}_2)$, on définit leur intersection $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ comme $(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2, \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)$ et leur union $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ comme $(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2, \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)$.

Étant donné une structure \mathfrak{M}_1 sur une signature Σ_1 et une structure \mathfrak{M}_2 sur une signature Σ_2 , on dit que ces structures sont *isomorphes sur leur signature commune*, ou *\cap -isomorphes*, si

- il y a une bijection ϕ de l'ensemble de base de \mathfrak{M}_1 , noté M_1 , vers celui de \mathfrak{M}_2 , noté M_2 ;
- pour toute constante c dans $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, on a $\phi(c^{\mathfrak{M}_1}) = c^{\mathfrak{M}_2}$;

- pour tout symbole de fonction f d'arité k dans $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, et pour tous a_1, \dots, a_k dans M_1 , on a $\phi(f^{\mathfrak{M}_1}(a_1, \dots, a_k)) = f^{\mathfrak{M}_2}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_k))$
- pour tout symbole de relation R d'arité k dans $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, et pour tous a_1, \dots, a_k dans M_1 , $R^{\mathfrak{M}_1}(a_1, \dots, a_k)$ si et seulement si $R^{\mathfrak{M}_2}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_k))$.

Question 4.1. *Supposons qu'une structure \mathfrak{M}_1 sur une signature Σ_1 et une structure \mathfrak{M}_2 sur une signature Σ_2 sont \cap -isomorphes. Montrer que :*

- pour tout terme clos t sur $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\phi(t^{\mathfrak{M}_1}) = t^{\mathfrak{M}_2}$;
- pour toute formule atomique close F sur $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\mathfrak{M}_1 \models F$ si et seulement si $\mathfrak{M}_2 \models F$.

Solution : Le premier point se fait par induction sur la structure ou la taille du terme t :

- si t est une constante c dans $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, alors $\phi(c^{\mathfrak{M}_1}) = c^{\mathfrak{M}_2}$ est donné par le fait que ϕ est un isomorphisme ;
- si $t = f(t_1, \dots, t_k)$ avec f symbole de fonction dans $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, alors par induction on a $\phi(t_1^{\mathfrak{M}_1}) = t_1^{\mathfrak{M}_2}, \dots, \phi(t_k^{\mathfrak{M}_1}) = t_k^{\mathfrak{M}_2}$, et donc

$$\begin{aligned} \phi(t^{\mathfrak{M}_1}) &= \phi(f^{\mathfrak{M}_1}(t_1^{\mathfrak{M}_1}, \dots, t_k^{\mathfrak{M}_1})) \\ &= f^{\mathfrak{M}_2}(\phi(t_1^{\mathfrak{M}_1}), \dots, \phi(t_k^{\mathfrak{M}_1})) \\ &= f^{\mathfrak{M}_2}(t_1^{\mathfrak{M}_2}, \dots, t_k^{\mathfrak{M}_2}) \\ &= t^{\mathfrak{M}_2}. \end{aligned}$$

Le deuxième point utilise le premier, F étant de la forme $R(t_1, \dots, t_k)$ avec R symbole de relation dans $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$:

$$\begin{aligned} \phi(F^{\mathfrak{M}_1}) &= \phi(R^{\mathfrak{M}_1}(t_1^{\mathfrak{M}_1}, \dots, t_k^{\mathfrak{M}_1})) \\ &= R^{\mathfrak{M}_2}(\phi(t_1^{\mathfrak{M}_1}), \dots, \phi(t_k^{\mathfrak{M}_1})) \\ &= R^{\mathfrak{M}_2}(t_1^{\mathfrak{M}_2}, \dots, t_k^{\mathfrak{M}_2}) \\ &= F^{\mathfrak{M}_2}. \end{aligned}$$

□

On pourrait facilement montrer que c'est plus généralement le cas pour toute formule F close (pas forcément atomique) sur la signature $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. On admettra cela pour la suite de l'exercice.

Question 4.2. *Supposons qu'une structure \mathfrak{M}_1 sur une signature Σ_1 et une structure \mathfrak{M}_2 sur une signature Σ_2 sont \cap -isomorphes. Montrer qu'il existe une structure \mathfrak{M}_\cup sur la signature $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ telles que, premièrement, \mathfrak{M}_\cup et \mathfrak{M}_1 sont \cap -isomorphes (sur leur signature commune Σ_1), et deuxièmement \mathfrak{M}_\cup et \mathfrak{M}_2 sont \cap -isomorphes (sur leur signature commune Σ_2). [Indication : pour interpréter par exemple une constante c on pourra regarder si c est dans Σ_1 ou dans $\Sigma_2 \setminus \Sigma_1$.]*

Solution : Soient M_1 et M_2 les ensembles de base de \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 , et $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ l'isomorphisme. On construit la structure \mathfrak{M}_\cup en interprétant les symboles de Σ_1 comme \mathfrak{M}_1 et les symboles de Σ_2 comme \mathfrak{M}_2 . De manière explicite :

Ensemble de base $M_\cup = M_1$	
Interprétation d'une constante c	
dans Σ_1 : $c^{\mathfrak{M}_\cup} = c^{\mathfrak{M}_1}$	dans $\Sigma_2 \setminus \Sigma_1$: $c^{\mathfrak{M}_\cup} = \phi^{-1}(c^{\mathfrak{M}_2})$
Interprétation d'un symbole de fonction f d'arité k	
dans Σ_1 : $f^{\mathfrak{M}_\cup}(a_1, \dots, a_k) = f^{\mathfrak{M}_1}(a_1, \dots, a_k)$	dans $\Sigma_2 \setminus \Sigma_1$: $f^{\mathfrak{M}_\cup}(a_1, \dots, a_k) = \phi^{-1}(f^{\mathfrak{M}_2}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_k)))$
Interprétation d'un symbole de relation R d'arité k	
dans Σ_1 : $R^{\mathfrak{M}_\cup}(a_1, \dots, a_k) = R^{\mathfrak{M}_1}(a_1, \dots, a_k)$	dans $\Sigma_2 \setminus \Sigma_1$: $R^{\mathfrak{M}_\cup}(a_1, \dots, a_k) = \phi^{-1}(R^{\mathfrak{M}_2}(\phi(a_1), \dots, \phi(a_k)))$

\mathfrak{M}_\cup et \mathfrak{M}_1 sont \cap -isomorphes car sur leur signature commune Σ_1 , ils coïncident exactement. \mathfrak{M}_\cup et \mathfrak{M}_2 sont \cap -isomorphes car tout symbole de leur signature commune Σ_2 est soit dans

$\Sigma_2 \setminus \Sigma_1$, auquel cas notre définition dit que ses interprétations dans \mathfrak{M}_\cup et dans \mathfrak{M}_2 coïncident au travers de ϕ , soit est dans $\Sigma_2 \cap \Sigma_1$, auquel cas son interprétation dans \mathfrak{M}_\cup coïncide avec celle dans \mathfrak{M}_1 , et le fait que ϕ soit un isomorphisme sur $\Sigma_2 \cap \Sigma_1$ fait qu'elle coïncide également avec l'interprétation dans \mathfrak{M}_2 au travers de ϕ . \square

Hypothèse pour le reste de l'exercice : Fixons maintenant deux signatures Σ_1 et Σ_2 disjointes, c'est-à-dire que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ est de la forme $(\mathcal{C}_\cap, \emptyset, \{=\})$, où \mathcal{C}_\cap est un ensemble fini de constantes, comme suggéré dans l'introduction de cet exercice. On notera n_\cap son cardinal.

Question 4.3. Décrire l'ensemble \mathcal{A}_\cap des formules atomiques closes sur $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Donner le cardinal de l'ensemble des parties de \mathcal{A}_\cap (le nombre d'ensembles $P \subseteq \mathcal{A}_\cap$).

Solution : $\mathcal{A}_\cap = \{(c_1=c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathcal{C}_\cap\}$. Cet ensemble a pour cardinal n_\cap^2 . L'ensemble de ses parties a donc pour cardinal $2^{(n_\cap^2)}$. \square

Pour toute partie $P \subseteq \mathcal{A}_\cap$, on définit P^* comme l'ensemble de formules $P \cup \{\neg F \mid F \in \mathcal{A}_\cap \setminus P\}$.

On admettra le résultat suivant, dont la preuve est simple mais peu pertinente pour INF412 : Soient E_1 et E_2 deux ensembles finis inclus dans \mathbb{N} avec une bijection ϕ de E_1 vers E_2 . Il existe une bijection $\bar{\phi}$ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} qui étend ϕ , i.e. telle que pour tout $n \in E_1$, $\bar{\phi}(n) = \phi(n)$.

Question 4.4. Soient \mathfrak{M}_1 une structure sur Σ_1 et \mathfrak{M}_2 une structure sur Σ_2 , dont les ensembles de base sont tous les deux \mathbb{N} . Soit $P \subseteq \mathcal{A}_\cap$ telle que $\mathfrak{M}_1 \models P^*$ et $\mathfrak{M}_2 \models P^*$.

— Donner une bijection ϕ entre l'ensemble $E_1 = \{n \mid \exists c \in \mathcal{C}_\cap, (n = c^{\mathfrak{M}_1})\}$ (l'ensemble des interprétations par \mathfrak{M}_1 des constantes communes) et $E_2 = \{n \mid \exists c \in \mathcal{C}_\cap, (n = c^{\mathfrak{M}_2})\}$ (l'ensemble des interprétations par \mathfrak{M}_2 des constantes communes), telle que pour toute constante $c \in \mathcal{C}_\cap$, $\phi(c^{\mathfrak{M}_1}) = c^{\mathfrak{M}_2}$.

— En déduire que \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 sont \cap -isomorphes.

Solution :

— On définit ϕ ainsi : Soit $n \in E_1$. Il existe une constante $c \in \mathcal{C}_\cap$ telle que $n = c^{\mathfrak{M}_1}$. On définit $\phi(n)$ comme $c^{\mathfrak{M}_2}$. Premièrement, ϕ est bien définie : en effet, si $n = c_0^{\mathfrak{M}_1}$ pour une autre constante $c_0 \in \mathcal{C}_\cap$, alors $\mathfrak{M}_1 \models (c=c_0)$. Comme $\mathfrak{M}_1 \models P^*$ c'est la formule $(c=c_0)$ (et non $\neg(c=c_0)$) qui est dans P^* , et donc comme $\mathfrak{M}_2 \models P^*$ on a aussi $c^{\mathfrak{M}_2} = c_0^{\mathfrak{M}_2}$. Deuxièmement, ϕ est injective : en effet, si $c^{\mathfrak{M}_1} \neq c_0^{\mathfrak{M}_1}$, c'est la formule $\neg(c=c_0)$ (et non $(c=c_0)$) qui est dans P^* , et donc comme $\mathfrak{M}_2 \models P^*$ on a aussi $c^{\mathfrak{M}_2} \neq c_0^{\mathfrak{M}_2}$. Enfin, elle est surjective parce que tout élément de E_2 est égal à $c^{\mathfrak{M}_2}$ pour une certaine constante $c \in \mathcal{C}_\cap$, et donc égal à $\phi(c^{\mathfrak{M}_1})$.

— Le résultat mathématique admis implique que ϕ s'étend en une bijection $\bar{\phi}$ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Il reste à montrer que $\bar{\phi}$ est un isomorphisme sur la signature $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Il faut vérifier que pour toute constante $c \in \mathcal{C}_\cap$, $\bar{\phi}(c^{\mathfrak{M}_1}) = c^{\mathfrak{M}_2}$, ce qui était une condition imposée pour ϕ . Il faut enfin vérifier que pour toute constantes $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_\cap$, on a $c_1^{\mathfrak{M}_1} = c_2^{\mathfrak{M}_1}$ si et seulement si $c_1^{\mathfrak{M}_2} = c_2^{\mathfrak{M}_2}$. Or chacune de ces deux propriétés est équivalente au fait que $(c_1=c_2)$ est dans P . \square

Question 4.5 (Théorème de Nelson-Oppen). Étant donné

— des ensembles \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 de formules closes, respectivement sur les signatures Σ_1 et Σ_2 ,

— une partie $P \subseteq \mathcal{A}_\cap$,

— un modèle \mathfrak{M}_1 des formules $\mathcal{A}_1 \cup P^*$ et un modèle \mathfrak{M}_2 des formules $\mathcal{A}_2 \cup P^*$, dont les ensembles de base sont tous les deux \mathbb{N} ,

montrer qu'il existe un modèle \mathfrak{M}_\cup de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ (sur la signature $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$).

Solution : La question 4.4 conclut que \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}_2 sont \cap -isomorphes. La question 4.2 fournit une structure \mathfrak{M}_\cup sur $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, qui est \cap -isomorphe à \mathfrak{M}_1 (sur Σ_1) et \cap -isomorphe à \mathfrak{M}_2 (sur Σ_2). Puisque $\mathfrak{M}_1 \models \mathcal{A}_1$, la question 4.1 (plus exactement, son extension aux formules closes arbitraires) implique $\mathfrak{M}_\cup \models \mathcal{A}_1$. De même, $\mathfrak{M}_2 \models \mathcal{A}_2$ implique $\mathfrak{M}_\cup \models \mathcal{A}_2$. \square

Question 4.6 (Réciproque). *Étant donné*

- des ensembles \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 de formules closes, respectivement sur les signatures Σ_1 et Σ_2 ,
- un modèle \mathfrak{M}_\cup de $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$,

montrer qu'il existe une partie $P \subseteq \mathcal{A}_\cap$, un modèle \mathfrak{M}_1 des formules $\mathcal{A}_1 \cup P^*$ et un modèle \mathfrak{M}_2 des formules $\mathcal{A}_2 \cup P^*$.

Solution : Soit $P = \{(c_1=c_2) \mid \mathfrak{M}_\cup \models (c_1=c_2)\}$. Clairement, $\mathfrak{M}_\cup \models P^*$. Soit \mathfrak{M}_1 la restriction de \mathfrak{M}_\cup à la signature Σ_1 . \mathfrak{M}_1 interprète les formules closes sur Σ_1 comme \mathfrak{M}_\cup , en particulier les formules $\mathcal{A}_1 \cup P^*$. De même \mathfrak{M}_2 interprète les formules closes sur Σ_2 comme \mathfrak{M}_\cup , en particulier les formules $\mathcal{A}_2 \cup P^*$. \square

On étudie maintenant les conséquences algorithmiques du théorème et de sa réciproque.

Une théorie \mathcal{T} sur une signature Σ est dite *sympathique* si

- il existe un algorithme prenant en entrée un ensemble fini I de formules closes sans quantificateurs sur Σ , et renvoie en sortie s'il existe un modèle de $\mathcal{T} \cup I$ ou pas ;
- et pour tout ensemble I de formules sans quantificateurs sur Σ , il existe un modèle de $\mathcal{T} \cup I$ si et seulement si en existe un dont l'ensemble de base est \mathbb{N} .

Question 4.7. *Étant donné une théorie sympathique \mathcal{T}_1 sur Σ_1 et une théorie sympathique \mathcal{T}_2 sur Σ_2 , donner un algorithme prenant en entrée deux ensembles finis I_1 et I_2 de formules closes sans quantificateurs, respectivement sur Σ_1 et Σ_2 , et renvoie en sortie s'il existe un modèle de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup I_1 \cup I_2$ ou pas.*

Solution : Soient A_1 et A_2 les algorithmes qui décident l'existence de modèles pour les théories sympathiques \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , respectivement.

L'algorithme qui décide l'existence de modèles pour $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ prend en entrée I_1 et I_2 .

On exécute une boucle pour étudier chaque partie $P \subseteq \mathcal{A}_\cap$. Pour chaque partie P :

- On appelle A_1 sur $I_1 \cup P^*$ (des formules closes sans quantificateurs sur Σ_1) pour déterminer s'il existe un modèle de $\mathcal{T}_1 \cup I_1 \cup P^*$.
- On appelle A_2 sur $I_2 \cup P^*$ (des formules closes sans quantificateurs sur Σ_2) pour déterminer s'il existe un modèle de $\mathcal{T}_2 \cup I_2 \cup P^*$.

Si la réponse des deux appels est oui, alors on s'arrête et on répond oui.

Sinon on passe à la partie P suivante.

Si on a épuisé toutes les parties P , on répond non.

L'algorithme termine car il y a au pire $2^{\binom{n}{\cap}}$ parties à tester.¹ L'algorithme est aussi correct :

- S'il répond oui, alors on a trouvé une partie P telle qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}_1 \cup I_1 \cup P^*$ et un modèle de $\mathcal{T}_2 \cup I_2 \cup P^*$; comme les théories sont sympathiques, il existe même des modèles dont l'ensemble de base est \mathbb{N} ; si bien que la question 4.5 (appliquée à $\mathcal{A}_1 = \mathcal{T}_1 \cup I_1$ et $\mathcal{A}_2 = \mathcal{T}_2 \cup I_2$) conclut l'existence d'un modèle de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup I_1 \cup I_2$.
- S'il répond non, alors il n'existe pas de modèle de $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup I_1 \cup I_2$ par la question 4.6. \square

1. On peut rapidement voir que les seules parties P pour lesquelles on a une chance de trouver un modèle sont des parties qui définissent une relation d'équivalence entre constantes. En effet, si par exemple $(c_1=c_2) \in P$ mais $(c_2=c_1) \notin P$, il ne peut pas y avoir de modèle de P^* . Dans la boucle de l'algorithme, on peut donc ne considérer que les P qui définissent des relations d'équivalence plutôt que toutes les $2^{\binom{n}{\cap}}$ parties possibles. Le nombre de relations d'équivalence est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bell (https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_Bell).