Promotion 2012
Année 3
Période 1
MAT553

PROGRAMME D'APPROFONDISSEMENT

# Topologie différentielle 1

*Andreï Moroianu*

**Édition 2011**
**Réimpression 2014**

CHAPITRE I

# ALGÈBRE TENSORIELLE ET ALGÈBRE EXTÉRIEURE

### Notations

Soit $k$ un corps commutatif et soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels sur $k$. On note $\mathcal{L}(E\ ;\ F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $F$.

Si $F = k$, on note $E^* = \mathcal{L}(E\ ;\ k)$ le dual de $E$.

### Exercice

Montrer que l'application de bidualité $E \to E^{**}$ est un isomorphisme, si et seulement si la dimension de $E$ est finie.

Si $E$, $F$, $G$, sont trois espaces vectoriels sur $k$, on note $\beta(E, F\ ;\ G)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $G$.

## I - PRODUIT TENSORIEL

**I-1** Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels sur $k$.

### Théorème I-1

i) il existe un espace vectoriel sur $k$, noté $E \otimes F$ qui se lit $E$ tenseur $F$, et une application bilinéaire $j \in \beta(E, F\ ;\ E \otimes F)$ tels que, pour tout espace vectoriel $G$ et toute application bilinéaire $b \in \beta(E, F\ ;\ G)$ il existe une *unique* application *linéaire* $c :\ E \otimes F \to G$ telle que $b = c \circ j$.

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "b"] & \\ E \otimes F \arrow[r, "c"] & G \end{tikzcd}$$

ii) Le couple $(E \otimes F,\ j)$ est unique à unique isomorphisme près. Ce qui signifie que si $(E \otimes F,\ j)$ et $((E \otimes F)',\ j')$ sont deux solutions de i), il existe un unique isomorphisme $I :\ E \otimes F \to (E \otimes F)'$ tel que $j' = I \circ j$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, remarquons qu'il est peut-être illégitime de donner un nom $(E \otimes F)$ à un objet qui n'est défini qu'à isomorphisme près. C'est pourtant ce que l'on fera.

**Preuve** : on commence par l'unicité ii), qui est un phénomène très général.

Puisque $(E \otimes F,\ j)$ est solution de i), il existe un unique $\alpha : E \otimes F \to (E \otimes F)'$ linéaire, telle que $j' = \alpha \circ j$ et de même, en échangeant les rôles de $E \otimes F$ et $(E \otimes F)'$, un unique $\beta : (E \otimes F') \to E \otimes F$ telle que $j = \beta \circ j'$.

On a donc $j = \beta \circ j' = \beta \circ (\alpha \circ j) = (\beta \circ \alpha) \circ j$.

Par ailleurs $j = \mathrm{Id}_{E \otimes F} \circ j$.

L'unicité de l'application linéaire $c$, requise en i) montre donc que $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{E \otimes F}$ et de façon analogue que $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{(E \otimes F)'}$

■

i) **Existence** : construction d'une solution.

Notons $k^{(E \times F)}$ l'espace vectoriel (énorme !) de base l'ensemble $E \times F$. C'est l'espace vectoriel constitué des applications de $E \times F \to K$ nulles sauf sur un ensemble fini.

Soit $\sigma : E \times F \hookrightarrow K^{(E \times F)}$ l'injection qui associe à $(e, f)$ le $(e, f)$-ième vecteur de base ou, si l'on veut, l'application de $E \times F \to K$ qui vaut 1 sur $(e, f)$ et 0 ailleurs.

Cette injection $\sigma : E \times F \to K^{(E \times F)}$ n'a pour l'instant aucune propriété algébrique. Elle n'est ni linéaire, ni bilinéaire.

On va maintenant faire un quotient minimum de $K^{(E \times F)}$ pour rendre $\sigma$ bilinéaire.

Considérons donc $R(E, F)$ le sous-espace vectoriel de $K^{(E \times F)}$ engendré par les éléments

$$\sigma(ae + be', cf + df') - ac\, \sigma(e, f) - ad\, \sigma(e, f') - bc\, \sigma(e', f) - bd\, \sigma(e', f')$$

et notons

$$E \otimes F = K^{(E \times F)}/R(E, F) \text{ et } j\ :\ E \times F \to E \otimes F$$

la composée $E \times F \xrightarrow{\sigma} K^{(E \times F)} \xrightarrow{R} K^{(E \times F)}/R(E, F)$ où $R$ est la surjection canonique.

L'application $j$ est bien devenu tautologiquement bilinéaire.

Si $b : E \times F \to G$ est n'importe quelle application bilinéaire, on définit $\tilde{c} : K^{(E \times F)} \to G$ comme étant l'application linéaire qui envoie l'élément de base $(e, f)$ sur $b(e, f)$. Cette application linéaire $\tilde{c}$ est nulle sur le sous-espace vectoriel $R(E, F)$ et définit donc par passage au quotient une application linéaire $c : K^{(E \times F)}/R(E, F) \to G$ telle que $b = c \circ j$. L'unicité d'un tel $c$ est evident. Ce qui montre que le couple $(K^{(E \times F)}/R(E, F), j)$ satisfait i).

■

Pour résumer, l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans $G$, s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $E \otimes F$ dans $G$

$$\begin{array}{ccc} \beta(E, F\,; G) & \simeq & \mathcal{L}(E \otimes F\ ;\ G) \\ b & \longleftrightarrow & c \end{array}$$

et cette propriété caractérise $E \otimes F$.

**Exemple** : soit $b : E \times k \to G$ une application bilinéaire quelconque et soit $j : E \times k \to E$ l'application bilinéaire définie par $j(V, \lambda) = \lambda V$ $\lambda \in k$, $V \in E$

$$\begin{tikzcd} E \times k \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "b"] & \\ E \arrow[r, "c"] & G \end{tikzcd}$$

et soit $c : E \to G$ l'application linéaire définie par $c(V) = b(V, 1)$. La commutativité du diagramme ci-dessus montre que le couple $(E, j)$ répond à la question. On a donc $E \otimes k \overset{I}{\simeq} E$ où $I$ est l'application linéaire induite par l'application bilinéaire $j$.

**I-2** Notations :

l'élément de $E \otimes F$, $j(e, f)$ se note $e \otimes f$ et se lit $e$ tenseur $f$.

**I-3** Propriétés évidentes du produit tensoriel

1) Commutativité

$$\begin{array}{ccc} E \otimes F & \xrightarrow{\sim} & F \otimes E \\ e \otimes f & \longmapsto & f \otimes e \end{array}$$

2) Associativité $(E \otimes F) \otimes G \xrightarrow{\sim} E \otimes (F \otimes G)$.

3) Pour $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in k$ et $e, e' \in E$, $f, f' \in F$ on a les règles de calcul

$$(\lambda e + \lambda' e') \otimes (\mu f + \mu' f') = \lambda\mu(e \otimes f) + \lambda\mu'(e \otimes f') + \lambda'\mu(e' \otimes f) + \lambda'\mu'(e' \otimes f') \in E \otimes F$$

4) Les éléments de $E \otimes F$ de la forme $e \otimes f$ s'appellent des tenseurs élémentaires. Ils engendrent $E \otimes F$.

**Preuve** : application directe de la définition de $E \otimes F$.

**I-4** Commutation du produit tensoriel et des sommes directes.

**Propriété I-4** Soient $E_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels et $F$ un espace vectoriel.

Les deux espaces vectoriels $(\bigoplus_{i \in I} E_i) \otimes F$ et $\bigoplus_{i \in I} (E_i \otimes F)$ sont canoniquement isomorphes.

**Preuve** : pour tout espace vectoriel $G$ on a la suite d'isomorphismes

$$\beta((\bigoplus_{i \in I} E_i), F\ ;\ G) \simeq \prod_{i \in I} \beta(E_i, F\ ; G)$$

$$\simeq \prod_{i\in I} \mathcal{L}(E_i \otimes F\ ;\ G) = \mathcal{L}(\bigoplus_{i\in I}(E_i \otimes F)\ ;\ G)$$

et par définition

$$\beta(\bigoplus_{i\in I} E_i, F\ ;\ G) = \mathcal{L}((\bigoplus_{i\in I} E_i) \otimes F\ ;\ G)\ .$$

■

**Corollaire I-4.1** si $e_i$ $i \in I$ est une base de $E$, et $f_j$ $j \in J$ une base de $F$, les éléments $e_i \otimes f_j (i,j) \in I \times J$ forment une base de $E \otimes F$.

**Preuve** : On a $E \simeq \bigoplus_{i\in I} ke_i$ et $F \simeq \bigoplus_{j\in J} kf_j$ et donc

$$E \otimes F \simeq \bigoplus_{i,j\in I\times J}(ke_i \otimes ke_j) = \bigoplus_{i,j\in I\times J} k(e_i \otimes f_j)$$

■

En particulier si dim $E$ et dim $F$ sont finies, $E \otimes F$ est aussi de dimension finie et dim $(E \otimes F) =$ dim $E\times$ dim $F$.

**I-5** Produit tensoriel d'applications linéaires.

Soient $E$, $F$, $E'$, $F'$ quatre espaces vectoriels sur $k$ et $f : E \to F$, $f' : E' \to F'$ deux applications linéaires.

Il existe une seule application linéaire, notée $f \otimes f' : E \otimes E' \to F \otimes F'$ caractérisée par la formule $f \otimes f'(e \otimes e') = f(e) \otimes f'(e')$.

**Exercice**

a) L'application $b : E^* \times F \to \mathcal{L}(E\ ;\ F)$ définie par $b(\varphi, f)(e) = \varphi(e) \cdot f$ où $\varphi$ est une forme linéaire sur $E$, $f \in F$ et $e \in E$ est une application bilinéaire de $E^* \times F \to \mathcal{L}(E\ ;\ F)$.

b) Elle induit donc une application linéaire

$$c\ :\ E^* \otimes F \to \mathcal{L}(E\ ;\ F)\ .$$

Montrer que $c$ est injective et que son image est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E\ ;\ F)$ constitué des applications linéaires $\ell : E \to F$ telles que la dimension de $\ell(E)$ soit finie.

c) En conclure que si dim $E$ est finie, ou si dim $F$ est finie on a un isomorphisme $E^* \otimes F \overset{c}{\simeq} \mathcal{L}(E\ ;\ F)$.

**I-3** Algèbre tensorielle.

On pose $T^0(E) = k$, $T^1(E) = E$ et pour $p > 1$ $T^p(E) = \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{p-\text{fois}}$.

**Définition I-3.1** On appelle algèbre tensorielle de $E$ que l'on note $T^*(E) = \underset{p\geq 0}{\otimes} T^p(E)$.

Le produit évident $T^p(E) \times T^q(E) \to T^{p+q}(E)$ qui associe à $x_1 \otimes x_2, \otimes \cdots x_p$, et $y_1 \otimes y_2 \cdots y_q \mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots x_p \otimes y_1 \otimes y_2 \cdots \otimes y_q$ en fait une algèbre (non commutative).

(Se rappeler que $k \otimes E = E$).

## II - Algèbre extérieure

### Définition II-1

On note $\Lambda^p E$ le quotient de $T^p(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_p$ où $x_i = x_j$ pour 2 indices $i \neq j$. On appelle $\Lambda^p E$ la puissance extérieure $p$-ième de $E$.

On note $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p$ la classe dans ce quotient de l'élément $x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_p$. Cet élément se lit $x_1$ extérieur $x_2$ extérieur $x_3$ extérieur $\cdots$ $x_p$.

On note $\Lambda^*(E) = \underset{p\geq 0}{\oplus} \Lambda^p E = k \oplus E \oplus \Lambda^2 E \oplus \cdots$.

Le produit $T^p(E) \times T^q(E) \to T^{p+q}(E)$ passe évidemment au quotient et induit un produit dit "produit extérieur" $\Lambda : \Lambda^p E \times \Lambda^q E \to \Lambda^{p+q} E$.

### Remarque II-2

La puissance extérieure $\Lambda^p E$ est définissable d'une manière analogue au produit tensoriel.

On appelle forme $p$-linéaire alternée sur $E$, à valeur dans $F$ une application $p$-linéaire $E^p \to F$, nulle chaque fois que deux vecteurs sont égaux.

On voit alors que $\Lambda^p E$ jouit des propriétés suivantes qui la caractérise. (Exercice).

Pour toute application $p$-linéaire alternée $\rho : E^p \to F$. Il existe une unique application linéaire $f : \Lambda^p E \to F$ telle que

$$\begin{tikzcd} E^p \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ \Lambda^p E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd} \qquad \rho = f \circ c$$

où $c$ est l'application $p$-linéaire alternée définie par $c(x_1, \cdots, x_p) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$.

### Proposition II-3

Soient $X \in \Lambda^p E$ et $Y \in \Lambda^q E$. On a

$$X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X \in \Lambda^{p+q}(E) .$$

**Preuve** : puisque les éléments de la forme $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ et $y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$ engendrent respectivement $\Lambda^p(E)$ et $\Lambda^q(E)$ il suffit de montrer la formule pour ceux-ci.

En fait dans $\Lambda^2(E)$ on a $x \wedge y = -y \wedge x$ puisque

$$\begin{aligned}(x+y) \wedge (x+y) = 0 &= x \wedge x + y \wedge y + x \wedge y + y \wedge x \\ &= 0 + 0 + x \wedge y + y \wedge x \ .\end{aligned}$$

La formule en découle.

■

**Corollaire II-4**

Si dim $E = n$. Soit $e_1 \cdots e_n$ une base de $E$. Les $C_n^p$ éléments $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \cdots e_{i_p}$ où $i_1 < i_2 < i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p E$. En particulier la dimension de $\Lambda^p E$ est $C_n^p$.

**II-5**

Le produit extérieure $\wedge$ : $\Lambda^* E \times \Lambda^* E \to \Lambda^* E$ fait de $\Lambda^* E$ une algèbre. On exprime la proposition II-3 en disant que c'est une algèbre commutative au sens gradué.

**II-6 Dualité**

Dorénavant on suppose $E$ de dimension finie.

**Théorème II-6**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie alors on a $\Lambda^p(E^*) = (\Lambda^p E)^*$.

**Démonstration** : remarquons d'abord que $(\Lambda^p E)^*$ est exactement l'espace vectoriel des $p$-formes alternées sur $E$.

Soit maintenant $f_1 \cdots f_p \in (E^*)^p$ $p$-formes linéaires sur $E$ et considérons l'application $p$-linéaire alternée $\varphi$ sur $E$ qui associe à $X_1 \cdots X_p \in E$ le déterminant de la matrice $p \times p$ $(a_{i,j})$ ou $a_{i,j} = f_i(X_j)$.

La correspondance $(f_1 \cdots f_p) \mapsto \varphi$ est une application $p$-linéaire alternée de $(E^*)^p$ dans $(\Lambda^p E)^*$ et fournit donc (remarque II-2) une application linéaire

$$i_p \ : \ \Lambda^p(E^*) \to (\Lambda^p E)^* \ .$$

**Exercice**

Montrer que $i_p$ est bien un isomorphisme.

**II-7 Produit extérieur d'une forme $p$-linéaire alternée, par une forme $q$-linéaire alternée.**

On a le diagramme :

$$
\begin{array}{ccccccc}
\Lambda & : & \Lambda^p(E^*)\times & \Lambda^q(E^*) & \rightarrow & \Lambda^{p+q}(E^*) \\
 & & \downarrow i_p & \downarrow i_q & & \downarrow i_{p+q} \\
\Lambda & : & (\Lambda^p(E))^*\times & (\Lambda^q(E))^* & \rightarrow & (\Lambda^{p+q}(E))^*
\end{array}
$$

ou par définition on pose

$$\varphi \wedge \psi = i_{p+q}(i_p^{-1}(\varphi) \wedge (i_q^{-1}(\psi))$$

1) Soit $u \in E^* = \Lambda^1(E^*) = (\Lambda^1(E))^*$ une forme linéaire sur $E$ et $\varphi \in (\Lambda^p E)^*$ une forme $p$-linéaire alternée.

Montrer la formule

$$u \wedge \varphi(X_1 \cdots X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-i)^i u(X_i)\varphi(X_1 \cdots \widehat{X}_i \cdots X_p)$$

où la notation $\widehat{X}_i$ signifie que l'on a éffacé $X_i$.

2) Donner la formule générale pour $\varphi \wedge \psi$.

Dorénavant on identifie $\Lambda^p(E^*)$ avec $(\Lambda^p E)^*$.

En particulier on pourra penser a l'élément $f_1 \wedge f_2 \cdots \wedge f_p \in \Lambda^p(E^*)$ où $f_i \in E^* = \Lambda^1 E^*$ comme à la forme $p$-linéaire alternée sur $E$ qui associe à $X_1 \cdots X_p$ le déterminant de la matrice

$$A = (a_{i,j}) \text{ ou } a_{i,j} = f_i(X_j)\ .$$

**II-8**

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Elle induit une application $\Lambda^p u : \Lambda^p E \rightarrow \Lambda^p F$ caractérisée par la formule $\Lambda^p u(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = u(x_1) \wedge u(x_2) \cdots \wedge (x_p)$.

**II-8.1 Image réciproque d'une forme $p$-linéaire alternée par une application linéaire.**

Soient $u : E \rightarrow F$ une application linéaire et $u^* : F^* \rightarrow E^*$ l'application duale.

On a donc (II.8.1) l'application linéaire

$$
\begin{array}{cccc}
\Lambda^p(u^*) : & \Lambda^p(F^*) & \rightarrow & \Lambda^p(E^*) \\
 & \wr| & & \wr| \\
 & (\Lambda^p(F))^* & \rightarrow & (\Lambda^p(E))^*
\end{array}
$$

qui associe donc à une forme $p$-linéaire alternée sur $F$, $\varphi$ une forme $p$-linéaire alternée sur $E$, (attention au changement de sens) que l'on note $u^*(\varphi)$.

**Exercice**

Montrer que pour $X_1 \cdots X_p \in E$ on a

$$u^*(\varphi)(X_1 \cdots X_p) = \varphi(u(X_1) \cdots u(X_p))\ .$$

et

$$u^*(\varphi \wedge \psi) = u^*(\varphi) \wedge u^*(\psi)\ .$$

CHAPITRE II

# Formes différentielles sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$

## I-1 Définition

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle $p$-forme différentielle sur $U$ (ou forme différentielle de degré $p$) une application de classe $C^\infty$, $w$ de $U$ dans $\Lambda^p((\mathbb{R}^n)^*) = (\Lambda^p(\mathbb{R}^n))^*$.

Une $p$-forme différentielle sur $U$ associe donc à chaque point de $U$, une forme $p$-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$.

- Par exemple si $p > n$, les $p$-formes différentielles sont identiquement nulles.

- Une 0-forme différentielle est juste une fonction $C^\infty$ définie sur $U$.

On note $\Omega^p(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des $p$-formes différentielles sur $U$.

Le produit extérieur du chapitre précédent fournit un produit (point par point) noté encore

$$\Lambda \ : \ \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \to \Omega^{p+q}(U)$$

## I-2 Notations

Soit $e_1, e_2, \cdots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il est traditionnel de noter $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la ième projection : $x_i = e_i^*$. C'est une application linéaire. Elle est donc différentiable et sa différentielle $dx_i : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ est l'application constante $dx_i(M) = x_i = e_i^*$.

$dx_i$ est donc aussi la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ qui associe a tout point $M$ de $\mathbb{R}^n$, la 1-forme alternée $e_i^*$.

Puisque $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \cdots \wedge e_{i_p}^*$ $0 < i_1 < i_2 < \cdots i_p \leq n$ forment une base de $\Lambda^p((\mathbb{R}^n)^*)$ on voit que toute $p$-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, s'écrit de façon unique

$$w = \sum_{I \subset J} \underset{I}{f} \ dx_I$$

où $J$ est l'ensemble des multi-indices $\in \{1, 2, \cdots, n\}$ strictement croissants de longueur $p$, et si $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$ avec $0 < i_1 < i_2 \cdots < i_p \leq n$, $dx_I$ est la $p$-forme différentielle $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \cdots \wedge dx_{i_p}$ et $f_I$ une application $C^\infty$ de $U$ dans $\mathbb{R}$.

Une $p$-forme différentielle sur $U$, n'est donc rien d'autre que la donnée de la collection des $C_n^p$ fonctions $C^\infty$, $f_I, I \in J$.

## II - Différentielle extérieure.

Si $f$ est une fonction $C^\infty$ sur $U$, sa différentielle

$$df \ : \ U \to (\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$$

apparaît donc comme une 1-forme différentielle sur $U$.

**Exercice**

Montrer que

$$df(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \ .$$

La correspondance $f \mapsto df$ est donc une application $R$-linéaire, $d : \Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$. Le théorème ci-dessous définit un prolongement canonique de $d$ à $\Omega^*(U)$ tout entier.

**Théorème II-1.**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique application, $\mathbb{R}$-linéaire, appelée différentielle extérieure, notée encore $d : \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$ satsifaisant les conditions suivantes.

1) $$d(\Omega^p(U)) \subset \Omega^{p+1}(U) \quad \forall p \geq 0$$

2) $$d \ : \ \Omega^0(U) \to \Omega^1(U) \text{ est la différentielle des fonctions}$$

3) $$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad \forall \alpha \in \Omega^p(U),\ \beta \in \Omega^*(U)$$

4) $$d \circ d \ : \ \Omega^p(U)) \to \Omega^{p+2}(U) \text{ est nulle} \quad \forall p \geq 0 \ .$$

**Preuve :**

**1/ Unicité.**

Soit $w = \sum_{I\subset J} f_I dx_I$ une $p$-forme différentielle. D'après 3) (noter l'abus de notations $f_I dx_I = f_I \wedge dx_I$) on a

$$dw = \sum_{I\subset J} d \underset{I}{f} \wedge dx_I + \sum_{I\subset J} \underset{I}{f} \wedge d(dx_I) \ .$$

Le deuxième terme de cette somme est nulle.

En effet $d(x_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{p} (-1)^i dx_1 \wedge dx_1 \cdots \wedge d(dx_i) \wedge \cdots \wedge dx_p = 0$ d'après (4).

Donc si $d$ existe on a nécessairement $dw = \sum_{I\subset J} d\underset{I}{f} \wedge dx_I$ qui est parfaitement déterminée d'après (2).

■

**2/ Existence.**

Posons donc pour $w = \sum_{I\subset J} \underset{I}{f}\, dx_I$, $dw = \sum_{I\subset J} d\underset{I}{f} \wedge dx_I$ et montrons que cette définition satisfait la $\mathbb{R}$-linéarité et 1), 2), 3), 4).

- La $\mathbb{R}$-linéarité, 1) et 2) sont clairs.

- Montrons 3). A cause de la linéarité, il suffit de vérifier pour $\alpha = f dx_I$ et $\beta = g dx_K$ où longueur de $I = p$ et longueur de $K$ quelconque. On a :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg\ dx_I \wedge dx_K) = f dg \wedge dx_I \wedge dx_K + g\ df \wedge dx_I \wedge dx_K \ .$$

en fait $g\ df \wedge dx_I \wedge dx_K = df \wedge dx_I \wedge g\ dx_K = d\alpha \wedge \beta$ tandis que

$$f dg \wedge dx_I \wedge dx_K = (-1)^p f dx_I \wedge dg \wedge dx_K = (-1)^p \alpha \wedge d\beta \ .$$

■

- Montrons 4). Là encore on peut supposer $w = f dx_I$

$$dw = df \wedge dx_I \text{ et } d(dw) \overset{3)}{=} d(df) \wedge dx_I - df \wedge d(dx_I)$$

$$d(df) = d(\sum_{I}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ dx_i) = \sum_{i<j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0 \ .$$

Le cas particulier où $f = x_i$ montre grâce à 3) que $d(dx_I) = 0$.

■

## III - Image réciproque d'une forme différentielle.

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \to V$ une application $C^\infty$.

Dans ces conditions nous allons définir une application linéaire

$$f^* \ : \ \Omega^p(V) \to \Omega^p(U) \qquad \forall p \geq 0 \ .$$

(Attention au changement de sens. On le signale en mettant l'étoile en haut dans la notation $f^*$.)

Soit $\omega \in \Omega^p(V)$. On pose

$$f^*(\omega)_{(u)}(X_1, \cdots, X_p) = \omega_{f(u)}(df_{(u)}(X_1), \cdots, df_{(u)}(X_p))$$

où $u \in U$ et $X_1, \cdots, X_p \in \mathbb{R}^n$.

Autrement dit la forme $p$-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$, $f^*(\omega)_{(u)}$ est l'image réciproque (II-8.1) de la forme $p$-linéaire alternée sur $\mathbb{R}^m$ $\omega_{(f(u))}$ par l'application linéaire $df_{(u)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

**Théorème III-1.**

L'application $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ vérifie les propriétés suivantes :

1)
$$f^* \text{ est } \mathbb{R} - \text{linéaire}$$

2)
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

3)
$$f^* \circ d = d \circ f^* \ .$$

**Démonstration**

1) est évident sur la définition.

2) Comme remarqué précedemment on a

$$f^*(\omega)_u = (df_{(u)})^*(\omega_{f(u)}) \ .$$

La propriété 2) est donc une reformulation de II-8.1 (exercice).

3) Commençons par le cas particulier où $\omega = \varphi \in \Omega^0(V)$.

**Lemme III-2.**

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(V) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1(V) \\ \Big\downarrow f^* & & \Big\downarrow f^* \\ \Omega^0(U) & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1(U) \end{array}$$

est commutatif

**Preuve** : Soit $\varphi \in \Omega^0(V)$. Par définition de $f^*$ on a $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ et $d(f^*(\varphi)) = d(\varphi \circ f)$.

Par définition $(f^*(d\varphi))_u(X) = d\varphi_{f(u)}(df_{(u)}(X))$ ce qui signifie que $f^*d\varphi = d(\varphi \circ f) = d(f^*(\varphi))$.

■

**Cas général**

Posons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $y_i = f_i(x_1, \cdots, x_n)$ et soit $\omega \in \Omega^p(V)$. A cause de 1) on peut supposer que $\omega = \varphi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p$. On a alors grâce à 2)

$$f^*(\omega) = \varphi \circ f \; f^*(dy_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dy_p) \; .$$

Le lemme III-2 montre que $f^*(dy_i) = d(f^*(y_i)) = d(y_i \circ f) = df_i$.

On a donc

$$f^*(\omega) = \varphi \circ f \; df_1 \wedge df_2 \cdots \wedge df_p$$

et

$$d(f^*(\omega)) = d(\varphi \circ f) \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p \; .$$

Par ailleurs $d\omega = d\varphi \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p$ et $f^*(d\omega) = f^*d\varphi \wedge f^*dy_1 \wedge \cdots \wedge f^*dy_p$ et donc (Lemme III-2)

$$f^*(d\omega) = d(\varphi \circ f) \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_p = d(f^*(\omega)) \; .$$

■

CHAPITRE III

# Cohomologie de De Rham

## I - Complexe de De Rham

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Les résultats du chapitre précédent se résument de la façon suivante. On considère la suite d'applications ci-dessous qu'on appelle le complexe de De Rham de l'ouvert $U$

$$0 \longrightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^1(U) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^2(U) \cdots \xrightarrow{\ d\ } \Omega^n(U) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{n+1}(U) = 0$$

### I-1 Définition

On note $Z^p(U)$ le sous espace vectoriel de $\Omega^p(U)$ constitué des $p$-formes différentielles $\omega$ telles que $d\omega = 0$. Une telle forme est dite *fermée*.

Par exemple $Z^n(U) = \Omega^n(U)$ (puisque $\Omega^{n+1}(U) = 0$).

On note $B^p(U)$ le sous espace vectoriel de $\Omega^p(U)$ constitué des $p$-formes différentielles de la forme $d\alpha$ où $\alpha \in \Omega^{p-1}(U)$. Une telle forme est dite *exacte*. (Par convention $B^0(U) = 0$).

Autrement dit

$$\begin{aligned} Z^p(U) &= \text{Ker } d \qquad d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U) \\ B^p(U) &= \text{Im } d \qquad d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U) \end{aligned}$$

et

Puisque $d \circ d = 0$ on voit que toute forme exacte est fermée : Ker $d \supset$ Im $d$. $B^p(U) \subset Z^p(U)$ et on peut donc considérer l'espace vectoriel quotient $Z^p(U)/B^p(U)$. On le note $H^p(U)$ et il s'appelle *le $p$-ième groupe de cohomologie* de l'ouvert $U$.

### Exemple I-2

Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ avec les coordonnées $x$ et $y$ et soit $\alpha \in \Omega^1(U)$ la 1-forme différentielle $\alpha(x,y) = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

On a

$$d\alpha(x,y) = d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy - d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx$$

$$d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx$$

et donc

$$d\alpha(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx \wedge dy - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \wedge dx = 0 \ .$$

On voit donc que la forme $\alpha \in Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. Elle est donc fermée et nous verrons très bientôt qu'elle n'est pas exacte. Ce qui montrera que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \neq 0$.

**Exemple I-3**

Calcul de $H^0(U)$.

$Z^0(U) \subset \Omega^0(U)$ est l'ensemble des fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ telles que $df = 0$. Un tel $f$ est donc constant sur chaque composante connexe de $U$. Tandis que $B^0(U)$ est par définition nul.

On voit donc que $H^0(U) = Z^0(U) = \mathbb{R}^C$ où $C$ désigne l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert $U$.

### I-4 Fonctorialité de la cohomologie.

Soit $f : U \to V$ une application $C^\infty$ de $U \subset \mathbb{R}^n$ dans $V \subset \mathbb{R}^m$.

Puisque $d \circ f^* = f^* \circ d$ on voit que

$$f^*(Z^p(V)) \subset Z^p(U)$$

et

$$f^*(B^p(V)) \subset B^p(U) \ .$$

L'application $f^*$ induit donc par passage au quotient une application $\mathbb{R}$-linéaire notée encore $f^* : H^p(V) \to H^p(U)$.

Soient maintenant 3 ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^\ell$ et $f : U \to V$, $g : V \to W$ deux applications de classe $C^\infty$. On vérifie immédiatement que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. et que $\mathrm{Id}_U^* = \mathrm{Id}$.

Ces propriétés se résument en disant que "le $p$-ième groupe de cohomologie" est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts d'espaces numériques et des applications $C^\infty$ dans la catégorie des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et des applications $\mathbb{R}$-linéaires.

En particulier si deux ouverts $U$ et $V$ sont difféomorphes, les groupes de cohomologie $H^p(V)$ et $H^p(U)$ sont isomorphes pour tout $p$. Nous allons voir qu'en fait il suffit de beaucoup moins qu'un difféomorphisme entre $U$ et $V$ pour assurer l'isomorphisme de $H^*(V)$ et $H^*(U)$.

## I-5 Homotopie.

C'est une notion tout à fait fondamentale.

### I-1 Définition

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, et $f_0$, $f_1$ deux applications $C^\infty$ de $U$ dans $V$. On dit que $f_0$ et $f_1$ sont (différentiablement) homotopes, s'il existe une application $C^\infty$ $F : U \times \mathbb{R} \to V$ telles que $F/U \times \{0\} = f_0$ et $F/U \times \{1\} = f_1$.

### Théorème fondamental I-5.

Soient $f_0$ et $f_1 : U \to V$ deux applications homotopes, alors $f_0^*$ et $f_1^*$ : $H^p(V) \to H^p(U)$ sont *égales* pour tout $p \geq 0$.

### Démonstration

1) première réduction : l'hypothèse signifie que dans le diagramme ci-dessous les deux triangles sont commutatfis : $f_0 = F \circ i_0$ et $f_1 = F \circ i_1$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, "f_0"] & & \\
& U \times \mathbb{R} \arrow[r, "F"] & V \\
U \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, "f_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $i_0 : U \to U \times \mathbb{R}$ est définie par $i_0(u) = (u, 0)$ et $i_1 : U \to U \times \mathbb{R}$ par $i_1(u) = (u, 1)$.

Il est donc suffisant (par fonctorialité) de démontrer le cas particulier du théorème I-5 $i_0^*$ et $i_1^* : H^p(U \times \mathbb{R}) \to H^p(U)$ sont égales pour tout $p \geq 0$.

2) **Lemme** : les deux applications $i_0^*$ et $i_1^* : H^p(U \times \mathbb{R}) \to H^p(U)$ sont égales.

La méthode est très générale.

Nous allons construire pour tout $p \geq 1$ une application linéaire $K_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ telle que $i_0^* - i_1^* = K_{p+1} \circ d + d \circ K_p$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "K_p"'] \arrow[d, "i_0^* - i_1^*"] & \Omega^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[dl, "K_{p+1}"'] & {} \\
\Omega^{p-1}(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^p(U) \arrow[r] & {} &
\end{tikzcd}$$

Une fois cela fait on constate alors que si $\omega$ est une $p$-forme fermée ($d\omega = 0$) les formes (fermées) $i_1^*(\omega)$ et $i_0^*(\omega)$ différent de la forme exacte $d(K_p(\omega))$. Elles ont donc même classe dans le groupe de cohomologie $H^p(U)$ ce qui montre bien que les application *en cohomologie* $i_0^*$ et $i_1^*$ sont égales.

■

3) Construction des applications $K_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$.

Cette construction s'appelle le **Lemme de Poincaré**.

On note $t$ la variable dans $\mathbb{R}$. Toute $p$-forme différentielle sur $U \times \mathbb{R}$ s'écrit alors de façon unique $\omega = \alpha(t) + \beta(t) \wedge dt$ où $\alpha(t)$ est une $p$-forme différentielle sur $U$ dépendant du paramètre $t$, et $\beta(t)$ une $(p-1)$-forme différentielle sur $U$ dépendant du paramètre $t$.

Si $\gamma(t)$ est une $k$-forme sur $U$ dépendant du paramètre $t$, on peut, pour chaque $t$ (fixé), considérer sa différentielle que nous notons $d\gamma(t)$ et qui est une $k+1$-forme sur $U$ dépendant du paramètre $t$.

On peut aussi dériver par rapport à $t$ pour obtenir de nouveau une $k$-forme différentielle sur $U$ dépendant du paramètre $t$, que nous noterons $\dot{\gamma}(t)$.

Posons $K_p(\omega) = (-1)^p \int_0^1 \beta(t)dt$.

On a $d\omega = d\alpha(t) + (-1)^p \dot{\alpha}(t) \wedge dt + d\beta(t) \wedge dt$ et

$$K_{p+1}(d\omega) = (-1)^{p+1} \int_0^1 d\beta(t)dt - \int_0^1 \dot{\alpha}(t)dt$$

$$d(K_p\omega) = (-1)^p \int_0^1 d\beta(t)dt \ .$$

Donc

$$d(K_p(\omega)) + K_{p+1}(d\omega) = -\int_0^1 \dot{\alpha}(t)dt = \alpha(0) - \alpha(1) = i_0^*(\omega) - i_1^*(\omega) \ .$$

■

**I-6 Conséquences.**

*Invariance de la cohomologie par type d'homotopie.*

**Définition**

On dit que deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ ont le même type d'homotopie s'il existe deux applications $C^\infty$ : $f : U \to V$ et $g : V \to U$ telles que $g \circ f$ soit homotope à l'identité de $U$, et $f \circ g$ soit homotope à l'identité de $V$.

**Théorème I-6**

Si $U$ et $V$ ont le même type d'homotopie, les groupes de cohomologie $H^p(U)$ et $H^p(V)$ sont isomorphes pour tout $p \geq 0$.

**Démonstration**

Considérons la composition

$$H^p(V) \xrightarrow{g^*} H^p(V) \xrightarrow{f^*} H^p(U) \ .$$

On a $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* \overset{\mathrm{ThI-5}}{=} (\mathrm{Id}_U)^* = \mathrm{Id}_{H^p(U)}$ et de même $g^* \circ f^* = \mathrm{Id}_{H^p(V)}$.

Il en résulte que $f^*$ est un isomorphisme (d'inverse $g^*$).

■

**I-6.1 Corollaire**

Soit $n \geq 0$. On a $H^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \forall p > 0 \\ \mathbb{R} & p = 0 \end{cases}$.

**Démonstration**

Soit $f : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(0) = 0$ et $g : \mathbb{R}^n \to \{0\}$.

On a $g \circ f = \mathrm{Id}_{\{0\}}$ et $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ identiquement nulle.

Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'application bilinéaire (donc $C^\infty$) définie par $F(V,t) = tV$ $t \in \mathbb{R}$ $V \in \mathbb{R}^n$.

C'est une homotopie entre $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $f \circ g$.

Les deux espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^n$ ont même type d'homotopie, donc même cohomologie.

■

## II - Suite exacte de Mayer-Victoris.

Soient $U_1$ et $U_2$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Le but de ce paragraphe est de déterminer la cohomologie de l'union $U_1 \cup U_2$ en fonction de la cohomologie de $U_1$, de $U_2$ et de $U_1 \cap U_2$.

### II-1 Un lemme d'algèbre.

Etant donné une suite d'espaces vectoriels $E_i$ $i \in \mathbb{Z}$ et une suite d'applications linéaires $f_i : E_i \to E_{i+1}$, nous dirons que la suite

$$E_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} E_i \xrightarrow{f_i} E_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

est
1) exacte en $i$ si Ker $f_i =$ Im $f_{i-1}$
2) exacte, si elle est exacte en $i$ pour tout $i$.

On appelle complexe différentiel, une famille $C^i$, $i \in \mathbb{Z}$ d'espaces vectoriels, munie d'une famille d'applications $d_i : C^i \to C^{i+1}$ telle que les composées $d_{i+1} \circ d_i$ soient nulles pour tout $i \in \mathbb{Z}$. (Par exemple le complexe de De Rham d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, complété par un infinité de 0 à droite et à gauche).

On note $(C^*, d)$ un tel complexe, $Z^i(C^*) =$ Ker $d_i$, $B^i(C^*) =$ Im $d_{i-1}$ et le quotient $Z^i(C^*)/B^i(C^*) = H^i(C^*)$ s'appelle le $i$-groupe de cohomologie du complexe $C^*$.

Si $(C^*, d)$ et $(C'^*, d')$ sont deux complexes différentiels, un morphisme $F : C^* \to C'^*$ est la donnée pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ d'une application linéaire $f^i : C^i \to C'^i$ telles que l'on ait $f^{i+1} \circ d_i = d'_i \circ f^i$ pour tout $i$.

Un tel morphisme induit pour chaque $i$ une application linéaire $H^i(C^*) \xrightarrow{f^*} H^i(C'^*)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition.

### II-2 Proposition

Soient $C^*$, $C'^*$, $C''^*$, trois complexes différentiels et soient $I : C^* \to C'^*$ et $S : C'^* \to C''^*$ deux morphismes de complexes telles que les suites

$$0 \to C^j \xrightarrow{i^*} C'^j \xrightarrow{s^*} C''^j \to 0$$

soient exactes pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

(Ce qui signifie : $i^*$ injective, $s^*$ surjective, et Ker $s^* =$ Im $i^*$).

On a alors une longue suite exacte infinie

$$\xrightarrow{\partial} H^k(C^*) \xrightarrow{i^*} H^k(C'^*) \xrightarrow{s^*} H^k(C''^*) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(C^*) \xrightarrow{i^*}$$

où $\partial$ est l'application linéaire définie ci-dessous :

**Définition de l'application** $\partial$ appelée "Le connectant" :

Soit $\alpha'' \in H^k(C''^*)$ et choisissons $x'' \in Z^k(C''^*)$ telle que $[x''] = \alpha'' \in H^k(C''^*)$.

Puisque $s^* : C'^k \to C''^k$ est surjective, choisissons $x' \in C'^k$ telle que $s^*(x') = x''$ et considérons $dx' \in B'^{k+1}(C'^*)$.

On a $s^*(dx') = d(s^*x') = dx'' = 0$ car $x'' \in Z^k(C''^*)$.

Puisque la suite $0 \to C^{k+1} \xrightarrow{i^*} C'^{k+1} \xrightarrow{s^*} C''^{k+1} \to 0$ est exacte, $dx'$ s'écrit de manière unique $i^*(x)$ où $x \in C^{k+1}$.

En fait $i^*(dx) = d(i^*x) = d(dx') = 0$, ce qui montre que $x$ appartient à $Z^{k+1}(C^*)$. On pose alors $\partial(\alpha'') = \beta \in H^{k+1}(C^*)$ où $\beta$ est la classe de $x \in Z^{k+1}(C^*)$ dans $H^{k+1}(C^*)$.

On doit vérifier que $\beta$ est bien indépendant des choix faits pour le définir.

i) **Indépendance du choix de** $x'' \in Z^k(C''^*)$ **tel que** $[x''] = \alpha$.

Soit $y''$ un autre élément de $Z^k(C''^*)$ tel que $[y''] = [x''] = \alpha$. On a $y'' = x'' + dz''$ où $z'' \in C''^{k-1}$. Puisque $s^* : C'^{k-1} \to C''^{k-1}$ est surjective, soit $u' \in C'^{k-1}$ telle que $s^*(u') = z''$. L'élément $y' = x' + du' \in C'^k$ vérifie bien $s^*(y') = y''$. On s'aperçoit que $dy' = dx'$.

■

ii) **Indépendance du choix de** $x' \in (C'^k)$ **tel que** $s^*(x') = x''$.

Si $y'$ est un autre choix, la suite

$$0 \to C^k \xrightarrow{i^*} C'^k \xrightarrow{s^*} C''^k \to 0$$

étant exacte, on voit que $y'$ s'écrit

$$y' = x' + i^*(z) \qquad z \in C^k$$

et donc $dy' = dx' + i^*(dz)$ et donc avec les notations évidentes, $y = x + dz \in Z^{k+1}(C^*)$. Ce qui montre bien que $[y] = [x] \in H^{k+1}(C^*)$.

iii) **Linéarité de** $\partial$ :

Les vérifications i) et ii) étant faites, la linéarité est évidente. (Pourquoi ?)

La vérification de l'exactitude de la longue suite de cohomologie est sans difficulté. Nous traitons par exemple l'exactitude en $H^k(C''^*)$ et nous conseillons vivement au lecteur d'effectuer les deux autres vérifications : exactitude en $H^k(C^*)$ et en $H^k(C'^*)$.

**Exactitude en $H^k(C''^*)$.**

Nous reprenons les notations de la définition de $\partial$

i) $\partial \circ s^* = 0$.

En effet si $\alpha'' \in H^k(C''^*)$ s'écrit $s^*(\alpha')$, $\alpha' \in H^k(C'^*)$. On a $x'' = s^*(x')$ où $[x'] = \alpha'$ et $[x''] = \alpha''$.

En particulier $dx' = 0$ et $\partial(\alpha'') = 0$.

ii) **Réciproquement** $\partial(\alpha) = 0$ signifie que $x \in Z^{k+1}(C^*)$ est de la forme $du$ $u \in C^k$.

On a alors $0 = i^*(x - du) = d(x' - i^*(u))$ où $x' - i^*(u) \in Z^k(C'^*)$ et on a bien $s^*(x' - i^*(u)) = s^*(x') = x''$ ce qui montre que $s^*(\overline{x' - i^*(u)}) = \alpha \in H^k(C''^*)$ où $\overline{x' - i^*(u)}$ est la classe dans $H^k(C'^*)$ de l'élément $x' - i^*(u) \in Z^k(C'^*)$.

■

## II-3 Suite exacte de Mayer-Vietoris.

### II-3 Proposition

Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Considérons le diagramme commutatif d'inclusions

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_V"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_U"] \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i_V"'] & & U \cup V \\ & V \arrow[ur, "j_V"'] & \end{tikzcd}$$

La suite ci-dessous est une suite exacte de complexes différentiels :

$$0 \to \Omega^*(U \cup V) \overset{j_V^* \oplus j_U^*}{\to} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \overset{i_U^* - i_V^*}{\to} \Omega^*(U \cap V) \to 0$$

**Démonstration.**

L'injectivité de $j_V^* \oplus j_U^*$, ainsi que l'exactitude au centre résulte immédiatement de la remarque (évidente mais fondamentale) que la donnée d'une forme différentielle sur $U \cup V$, n'est rien d'autre que la donnée d'une forme différentielle sur $U$, et d'une forme différentielle sur $V$, qui coïncident sur l'intersection $U \cap V$.

Pour la surjectivité de $i_U^* - i_V^*$ nous utilisons la proposition suivante qui sera démontrée plus loin dans le cours.

**Proposition**

Il existe deux fonctions $C^\infty$ $\alpha$ et $\beta$ de $U \cup V \to \mathbb{R}$ telles que

– $\alpha + \beta = 1$
– Supp $\alpha \subset U$
– Supp $\beta \subset V$

*Preuve de la surjectivité de $i_U^* - i_V^*$ :*

Soit $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$.

On note $\alpha\omega \in \Omega^p(V)$ la forme définie par la formule

$$\alpha\omega(v) = \begin{cases} \alpha(v) \times \omega(v) & v \in U \cap V \\ 0 & v \notin U \cap V \end{cases}$$

et de façon analogue la forme de $\Omega^p(U)$, $\beta\omega$. On a bien

$$i_U^*(\beta\omega) = \beta\omega \text{ et } i_V^*(\alpha\omega) = \alpha\omega \ .$$

donc

$$i_U^* - i_V^*(\beta\omega, -\alpha\omega) = (\beta + \alpha)\omega = \omega \ .$$

■

**Remarque** : Noter l'interversion ($\alpha\omega$ est une forme sur $V$, et $\beta\omega$ sur $U$).

**Corollaire** : Suite exacte de Mayer-Vietoris.

Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On a une longue suite exacte de cohomologie de De Rham

$$\xrightarrow{\partial} H^p(U \cup V) \xrightarrow{j_V^* \oplus j_U^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \xrightarrow{i_U^* - i_V^*} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(U \cup V) \to$$

*Preuve* : cela résulte immédiatement de la proposition II-1 et de la remarque

$$H^p(\Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)) = H^p(\Omega^*(U)) \oplus H^p(\Omega^*(V)) \ .$$

■

## II-4 Cohomologie de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

**II-4 Théorème**

Pour tout $n \geq 2$. On a $H^0(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{R}$ et $H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0$ pour $p \neq 0$ et $p \neq n-1$.

*Preuve* : on introduit les ouverts $U$ = complémentaire du fermé $\{(x_1, \cdots, x_n)/x_2 = x_3 \cdots = x_n = 0 \text{ et } x_1 \geqslant 0\}$ et $V$ complémentaire du fermé $\{(x_1 \cdots x_n)|x_2 = \cdots = x_n = 0 \text{ et } x_1 \leqslant 0\}$.

On constate que

i) $\mathbb{R}^n - \{0\} = U \cup V$.

ii) Les ouverts $U$ et $V$ sont étoilés donc ont le type d'homotopie du point. En particulier $H^p(U) = H^p(V) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}$.

iii) $U \cap V = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1} - \{0\})$ et a donc le type d'homotopie et donc la même cohomologie que $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris commence comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to & H^0(U \cup V) & \to & H^0(U) \oplus H^0(V) & \to & H^0(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^1(U \cup V) & \to & H^1(U) \oplus H^1(V) \\
& \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
0 \to & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \to & \left\{\begin{array}{cc} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & n = 2 \\ \mathbb{R} & n > 2 \end{array}\right\} & \to & H^1(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \to & 0
\end{array}$$

puisque $U$, $V$ et $U \cup V$ sont connexes tandis que $U \cap V$ est connexe pour $n > 2$ et a deux composantes connexes pour $n = 2$.

Il en résulte que $H^1(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq 0$ pour $n > 2$ et que $H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \simeq \mathbb{R}$.

Par ailleurs on a la suite exacte pour $p > 1$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) & \to & H^{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^p(U \cup V) & \to & H^p(U) \oplus H^p(V) \\
\|(ii) & & \downarrow \wr (iii) & & \| & & \|(ii) \\
0 & \to & H^{p-1}(\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}) & \xrightarrow{\partial} & H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) & \to & 0
\end{array}$$

qui montre que le connectant $\partial$ est un isomorphisme. On a donc par récurrence l'égalité pour $p \leq n - 1$

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq H^1(\mathbb{R}^{n-p+1} - \{0\}) .$$

Ce qui montre que pour $1 \leq p < n - 1$

$$H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0 \text{ et } H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq \mathbb{R} .$$

Puisque, comme toujours, $H^p(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0$ pour $p > n$ il reste à montrer que $H^n(\mathbb{R}^n - \{0\}) \simeq H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ est nul.

Considérons donc $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ et ses deux ouverts $U$ et $V$. L'intersection $U \cap V$ a deux composantes connexes, chacune ayant le type d'homotopie du point il en résulte que $H^1(U \cap V)$ ainsi que $H^2(U)$ et $H^2(V)$ sont nuls.

La suite exacte

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(U \cap V) & \xrightarrow{\partial} & H^2(U \cap V) & \to & H^2(U) \oplus H^2(V) \\
\| & & \| & & \| \\
0 & \to & H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\}) & \to & 0
\end{array}$$

montre que $H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ est bien nul.

■

## III - Cohomologie à support compact.

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega^p(U)$ une $p$-forme différentielle sur $U$. On appelle support de $\omega$, que l'on note Supp $\omega$, l'adhérence de l'ensemble des points de $U$ où $\omega$ est non nulle. C'est aussi le complémentaire de l'ensemble des points de $U$ qui possèdent un voisinage où $\omega$ est identiquement nulle. On a donc Supp $d\omega \subset \operatorname{Supp} \omega$.

En particulier si le support de $\omega$ est compact, celui de $d\omega$ l'est aussi. On note $\Omega^p_c(U)$ le sous-ensemble de $\Omega^p(U)$ constitué des $p$-formes différentielles sur $U$ dont le support est compact. C'est un sous-espace vectoriel de $\Omega^p(U)$ et en fait $(\Omega^*_c(U), d)$ est un sous-complexe différentiel de $(\Omega^*(U), d)$.

On note $H^p_c(U)$, qu'on appelle $p$-ième groupe de cohomologie à support compact, le $p$-ième groupe de cohomologie du complexe des formes différentielles à support compact.

### III-1 Attention

Si $f : U \to V$ est une application $C^\infty$, l'application $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ n'envoie pas en général $\Omega^*_c(V)$ dans $\Omega^*_c(U)$ puisque l'image réciproque d'une forme à support compact n'est pas en général à support compact.

### III-1 Définition

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$, et $f : U \to V$ une application $C^\infty$. On dit que $f$ est *propre* si l'image réciproque par $f$ de tout compact de $V$ est un compact de $U$.

### III-1 Proposition

Soient $f^* : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ une application $C^\infty$ *propre*. L'application linéaire $f^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ induit une application notée encore $f^* : \Omega^*_c(V) \to \Omega^*_c(U)$.

*Preuve* : évidente

Pour résumer la cohomologie à supports compacts est un foncteur contravariant de la catégorie des ouverts d'espaces euclidiens et des applications *propres* dans la catégorie des espaces vectoriels et des applications linéaires.

### III-1 Corollaire

Si $U$ et $V$ sont deux ouverts difféomorphes, leurs cohomologies à support compact sont isomorphes.

**III-2 Suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact.**

Soient $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Toute forme différentielle à support compact contenu dans $U$ est aussi une forme différentielle à support compact contenu dans $V$. Ceci montre que l'inclusion $i : U \hookrightarrow V$ induit une application (évidemment linéaire) notée $i_* : \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(V)$ qui commutte évidemment à l'opératuer $d$.

**III-2 Théorème**

Si $U$ et $V$ sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Le diagramme (habituel) d'inclusions :

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_U"] \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "i_V"'] & & U \cup V \\ & V \arrow[ur, "j_V"'] & \end{tikzcd}$$

induit la suite exacte de complexes ci-dessous

$$0 \to \Omega_c^*(U \cap V) \xrightarrow{i_{U_*} \oplus i_{V_*}} \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xrightarrow{j_{U_*} - j_{V_*}} \Omega_c^*(U \cup V) \to 0$$

*Preuve* :

- Chacune des applications $i_{U_*}$ et $i_{V_*}$ est injective et donc a fortiori l'application $i_{U_*} \oplus i_{V_*}$.

- Soient $\omega_1 \in \Omega_c^*(U)$ et $\omega_2 \in \Omega_c^*(V)$ telles que $j_{U_*}(\omega_1) = j_{V_*}(\omega_2)$. Ceci montre que $\omega_1$ et $\omega_2$ ont en fait leur support dans $U \cap V$ et qu'elles coïncident en tant que forme à support compact de $U \cap V$.

- La surjectivité de l'application $j_{U_*} - j_{V_*}$ résulte là encore de la proposition de la page 21.

Si $\omega$ est une forme à support compact dans $U \cup V$. La forme $\alpha\omega$ est une forme à support compact dans $U$, et $\beta\omega$ est une forme à support compact dans $V$.

On a bien $\omega = (j_{U_*} - j_{V_*})(\alpha\omega, -\beta\omega)$

■

**III-2 Corollaire**

Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On a la suite exacte infinie ci-dessous

$$\xrightarrow{\partial} H_c^p(U \cap V) \xrightarrow{i_{U_*} \oplus i_{V_*}} H_c^p(U) \oplus H_c^*(V) \xrightarrow{j_{U_*} - j_{V_*}} H_c^*(U \cup V) \xrightarrow{\partial} H_c^{p+1}(U \cap V) \to$$

*Preuve* : c'est une conséquence immédiate du théorème III-2 et de la proposition II-2.

### III-3 Cohomologie à support compact de $\mathbb{R}^n$.

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le but de ce paragraphe est de comparer les groupes de cohomologie à support compact de $U \times \mathbb{R}$ à ceux de $U$.

Toute $p$-forme différentielle $\omega$ à support compact de $U \times \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique $\omega = \alpha(t) + \beta(t) \wedge dt$ où $\alpha(t)$ est une $p$-forme différentielle de $U$ dépendant du paramètre $t$, à support compact dans $U$ pour chaque $t$ et nulle pour $t$ suffisamment grand et $\beta(t)$ une $(p-1)$-forme différentielle de $U$ dépendant du paramètre $t$, à support compact dans $U$ pour chaque $t$ et nulle pour $t$ suffisamment grand.

On définit alors l'application

$$\Pi_* \ : \ \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^p(U)$$

par la formule $\Pi_*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(t) dt$.

**III-3 Théorème**

i) L'application $\Pi_* \ : \ \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^p(U)$ commutte aux opérateurs différentiels.

ii) Elle induit donc une application notée encore

$$\Pi_* \ : \ H_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\ \sim\ } H_c^p(U) \ .$$

Cette application est un isomorphisme.

*Preuve :*

i) On a (avec les notations déjà rencontrées p. 16)

$$d\omega = d\alpha(t) + ((-1)^{p+1}\dot{\alpha}(t) + d\beta(t)) \wedge dt$$

et

$$\Pi_*(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} ((-1)^{p+1}\dot{\alpha}(t) + d\beta(t))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta(t)dt = d(\Pi_*(\omega)) \ .$$

■

ii) Soit $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $C^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)dt = 1$.

Considérons l'application

$$e_* \ : \ \Omega_c^p(U) \to \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$$

définie par la formule $e_*(\omega) = e(t)\omega \wedge dt$.

Cette application $e_*$ commutte aux différentielles. En effet

$$e_*(d\omega) = e(t)d\omega \wedge dt = d(e(t)\omega \wedge dt) = d(e_*(d\omega)) \ .$$

Elle induit donc une application encore notée $e_* : H_c^p(U) \to H_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$ dont nous allons voir qu'elle est l'inverse de l'application $\Pi_*$.

D'abord la composition

$$\Omega_c^p(U) \xrightarrow{e_*} \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\Pi_*} \Omega_c^p(U)$$

est bien l'identité de $\Omega_c^p(U)$.

En effet $\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\omega dt = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)dt = \omega$.

Par contre la composition

$$\Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\Pi_*} \Omega_c^p(U) \xrightarrow{e_*} \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$$

n'est pas l'identité.

On a cependant le

**III-3 Lemme**

Soit $K : \Omega_c^{p+1}(U \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^p(U \times \mathbb{R})$ définie par

$$K(\alpha(t) + \beta(t) \wedge dt) = \int_{-\infty}^{t} \beta(u)du - \left(\int_{-\infty}^{t} e(u)du\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(u)du \; .$$

On vérifie que $\mathrm{Id}_{\Omega_c^{p+1}(U\times\mathbb{R})} - e_* \circ \Pi_* = (-1)^p(Kd - dK)$.

■

Ce qui montre (Lemme p. 15) qu'en cohomologie, l'application $e_* \circ \Pi_*$ est bien l'identité de $H_c^{p+1}(U \times \mathbb{R})$.

■

**III-3 Corollaire**

Soit $n \geq 0$,

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & p \neq 0 \\ \mathbb{R} \text{ pour} & p = n \end{cases}$$

*Remarque :*

- En fait on connait un générateur de $H_c^p(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit d'itérer $n$-fois l'application $e_*$ à un générateur de $H_c^0(pt)$ à savoir la fonction constante égale à 1.

On trouve la $n$-forme différentielle à support compact de $\mathbb{R}^n$

$$e(t_1) \times e(t_2) \times e(t_n)dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

dont le support peut être choisi arbitrairement petit.

# CHAPITRE IV

## Variétés différentiables

### I. Définitions

I-1. On appelle *variété topologique* tout espace topologique $X$ satisfaisant les conditions suivantes :

i) tout point de $X$ possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n$.
ii) l'espace $X$ est séparé.
iii) l'espace $X$ est union dénombrable de compacts.

I-2. **Remarques.** – La condition ii) ne résulte pas de i). (Donner un exemple).

– On peut remplacer i) par i)' : Tout point de $X$ possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. (Pourquoi ?).

– Les conditions techniques ii) et iii) sont là pour assurer l'existence de partitions de l'unité (cf. Prop. V-2).

I-3. On appelle *atlas différentiable* sur la variété topologique $X$ la donnée :

i) d'un recouvrement ouvert de $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.
ii) pour chaque $U_i$ d'un homéomorphisme :
$\varphi_i : U_i \to \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout couple d'indice $i, j \in I$ la composition

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap U_j \xrightarrow{\varphi_j} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

soit différentiable.

Le couple $(U_i, \varphi_i)$ s'appelle une carte et les applications $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ s'appellent les applications de changement de cartes.

I-4. Deux atlas différentiables sur la même variété topologique $X$, $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont dits *équivalents* si "leur réunion" est encore un atlas différentiable, autrement dit si les applications

$$\varphi_i(U_i \cap V_j) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} U_i \cap V_j \xrightarrow{\psi_j} \psi_j(U_i \cap V_j)$$

sont elles aussi différentiables pour tout $i \in I$ et $j \in J$.

I-5. On appelle *variété différentiable* une variété topologique munie d'une classe d'équivalence d'atlas différentiable.

I-6. **Remarque.** La donnée d'un atlas différentiable sur une variété topologique en fait une variété différentiable. (Celle munie de la classe d'équivalence de l'atlas en question).

I-7. **Applications différentiable. Difféomorphisme.** Soient $V, V'$ deux variétés différentiables et $f : V \to V'$ une application continue.

Soient $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(U'_{i'}, \varphi_{i'})_{i'\in I'}$ deux atlas différentiables définissant respectivement les variétés différentiables $V$ et $V'$.

On dit que $f$ est *différentiable* si les composées

$$\varphi_i(f^{-1}(U'_i) \cap U_i) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} f^{-1}(U'_i) \cap U_i \xrightarrow{f} U'_{i'} \xrightarrow{\varphi'_{i'}} \mathcal{O}'_{i'}$$

sont différentiables pour tout $i \in I$, $i' \in I'$. Cette définition ne dépend pas des atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(U'_i, \varphi'_{i'})_{i'\in I'}$ mais seulement de leurs classes d'équivalences respectives. (Le vérifier).

On dit que $f : V \to V'$ est un difféomorphisme si

i) $f$ est bijective,

ii) $f$ est $f^{-1}$ sont différentiables.

**Exercice.** Soient $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ trois variétés différentiables et $f, g$ deux applications différentiables. Le composé $g \circ f$ est différentiable.

En particulier l'ensemble des difféomorphismes d'une variété $V$ sur elle-même forment un groupe (pour la composition) noté $Diff(V)$.

## II. Exemples évidents de variétés

1) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. On en fait une variété différentiable en le munissant de la classe d'équivalence de l'atlas à *une* carte (donc il n'y a rien à vérifier)

$$U \xrightarrow{Id} \mathcal{O} = U \subset \mathbb{R}^n$$

2) Soit $U \subset V$ un ouvert d'une variété différentiable et soit $(V_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas définissant $V$.

L'atlas $(V_i \cap U\ ,\ \varphi_i/V_i \cap U)_{i\in I}$ fait de $U$ une variété différentiable.

3) Si $V$ et $V'$ sont deux variétés différentiables. On note $V \times V'$ et on l'appelle la variété produit, la variété différentiable dont l'espace topologique sous-jacent est le produit $V \times V'$ muni de la topologie produit et si $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, respectivement $(U'_{i'}, \varphi'_{i'})_{i'\in I'}$ définissent $V$, resp. $V'$, on considère l'atlas différentiable $(U_i \times U'_{i'}\ ,\ \varphi_i \times \varphi'_{i'})_{i,i'\in I\times I'}$ pour définir $V \times V'$ dont la classe d'équivalence ne dépend que de celle des atlas $(U_i, \varphi_i)$ et $(U'_i, \varphi'_i)$.

## III. Rang - Dimension - Sous-variétés :

III-1. **Lemme.** Soit $h : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{O}' \subset \mathbb{R}^p$ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$

Alors $n = p$

**Preuve :** Soit $o \in \mathcal{O}$ un point de l'ouvert $\mathcal{O}$. La différentielle de $h$ au point $o$, $Dh(o)$, est une application linéaire inversible (d'inverse $Dh^{-1}_{(h(\mathcal{O}))}$) de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^p$ $\square$

III-2. Soient $V, V'$ deux variétés différentiables, $v \in V$ un point de $V$ et $f : V \to V'$ une application différentiable.

On considère l'application différentiable $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ et sa différentielle au point $\varphi(v)$. On constate que le rang de cette application linéaire ne dépend que de $f$ (cf. Lemme III.1)) et on l'appelle le *rang de l'application* $f$ au point $v$.

III-3. **Proposition définition.** Soit $V$ une variété différentiable et *connexe*, et $(V_i, \varphi_i)$ un atlas différentiable de $V$.

Appelons $n_i$ (cf. Lemme) la dimension de l'espace $\mathbb{R}^{n_i}$ qui contient l'ouvert $\varphi_i(V_i)$. Ce nombre ne dépend pas de $i$, et ne change pas si l'on remplace l'atlas de $V$ par un atlas équivalent. On l'appelle donc $n$ et c'est la *dimension* de la variété différentiable $V$.

**Preuve :** L'ensemble des points de $V$ qui possèdent une carte $(U, \varphi)$ tels que $\dim \varphi(U) = n$ est ouvert et fermé dans $V$. $\square$

**Exemples, Exercices :**

a) il y a une seule variété connexe de dimension 0 à savoir 1pt.

b) les variétés de dimension 1 s'appellent des courbes. Toute courbe connexe et compacte est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.

c) les variétés de dimension 2 s'appellent des surfaces. Par exemple la sphère $S^2$, le tore $S^1 \times S^1$ etc.

III-4. Soit $W$ une variété différentiable et $A \subset W$ une partie de $W$. On dit que $A$ est une sous-variété de $W$ si tout point de $a$ de $A$ est contenu dans une carte $(U_i, \varphi_i)$ d'un atlas définissant $W$ tel que

$$\varphi_i(U_i \cap A) = \varphi_i(U_i) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

pour un certain $p$.

III-5. Toute sous-variété d'une variété différentiable est en fait une variété.

**Preuve :**

1) tout point $a \in A$ possède un voisinage dans $A$ (à savoir $U_i \cap A$) homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (à savoir $\varphi(U_i) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}$). $A$ est donc une variété topologique.

2) La famille $(U_i \cap A\ ,\ \varphi_i / U_i \cap A)$ est évidemment un atlas différentiable sur $A$. □

Voici maintenant un critère qui permet de reconnaître facilement une sous-variété.

III-6. **Théorème.** Soit $A \subset W$ une partie de la variété différentiable $W$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i) $A$ est une sous-variété de $W$.

ii) tout point $a \in A$ possède un voisinage $U$ dans $W$ et une fonction différentiable $F : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, de rang $n-p$ en tout point de $U$ telle que : $A \cap U = F^{-1}(0)$ (autrement dit, la partie $A$ est localement définissable par $n-p$ équations indépendantes).

**Preuve :**

i) $\Rightarrow$ ii)

On choisit $U = U_i$ et $F : U_i \to \mathbb{R}^{n-p}$ $\quad F = p \circ \varphi_i$ où $p$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^{n-p}$. On constate que $F$ est bien différentiable, de rang $n-p$, et que :

$$F^{-1}(0) = \rho_i^{-1}(p^{-1}(0)) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}) = U \cap A$$

ii) $\Rightarrow$ *i)*

Quitte à restreindre $U$ on peut supposer que c'est un domaine de carte de $W$. Et on considère l'application $C^\infty$ : $G = F.\varphi_i^{-1} : \mathcal{O}_i \to \mathbb{R}^{n-p}$. C'est une application $C^\infty$, de rang $n-p$. Supposons, pour simplifier, que ce soit le mineur $(\frac{\partial G_j}{\partial x_i})i, j \in (p+1, p+2, \dots, n)$ qui soit inversible.

Soit alors $H : \mathcal{O}_i \to \mathbb{R}^n$ défini par

$$H(x_1, -x_n) = (x_1, \cdots x_p, G(x_1, -x_n))$$

C'est une application $C^\infty$ de rang maximum. C'est donc un difféomorphisme local disons de $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}'' \subset \mathbb{R}^n$.

On pose $F' = H \circ \varphi_i \quad F' : \varphi_i^{-1}(\mathcal{O}') \to \mathcal{O}''$

$(\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}'), F')$ est une carte de $W$ et $\varphi_i^{-1}(\mathcal{O}') \cap A$ est bien égal à $F'^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ $\square$

**Remarques importantes :**

1) Puisque la condition "être de rang maximum" est une condition ouverte, on peut remplacer la condition ii) du Théorème III.5 par la condition ii') $F$ est de rang $n-p$ au point $a$.

2) Le théorème III.5 est une grande source d'exemples de variétés (puisque les sous-variétés sont des variétés).

En fait on peut montrer que la toute variété est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ pour $N$ assez grand. Ce sont donc tous les exemples. Pourquoi alors parler de variétés ?

## IV. Les variétés quotients :

IV-1. **Vocabulaire des actions de groupe.** a) Soit $G$ un groupe (discret) et $X$ un ensemble. Se donner une action de $G$ dans $X$, c'est se donner un homomorphisme de groupes $\rho : G \to Bij(X)$ où $Bij(X)$ est le groupe des bijections de l'ensemble $X$.

Si $\rho$ est claire dans le contexte on note simplement $g.x$ le point $\rho(g).x$.

On a alors

$$g_1.(g_2 x) = (g_1 g_2).x \quad \forall g_1, g_2, x$$

$$1.x = x \quad \forall x$$

On note $\mathcal{O}(x)$ qu'on appelle l'orbite de $x$ sous $G$. $\mathcal{O}(x) = \{g.x \quad g \in G\}$. La relation "être dans la même orbite" est une relation d'équivalence.

On note $X/G$, qu'on appelle le quotient de $X$ par $G$, l'ensemble des classes d'équivalences.

On dit que l'action est *transitive* s'il n'y a qu'une seule orbite.

- Soit $x$ un point de $X$. On appelle isotropie de $x$ le sous-groupe $I(x)$ de $G$ constitué des $g \in G$ tels que $g.x = x$

- Si $I(x)$ est réduit à l'élément neutre pour tout $x \in X$. On dit que l'action est *libre.*

- Libre et transitif s'appelle *simplement transitif.*

Noter que dans ce cas le choix d'un point $x \in X$ établit une bijection de $G$ sur $X$ définie par $g \mapsto g.x$. Cette bijection dépend bien sûr du choix de $x$. Elle n'est pas canonique.

b) Supposons maintenant que $X$ soit un espace topologique.

Une action *continue* de $G$ dans $X$ est la donnée d'un homorphisme de groupe $\rho : G \to \text{Homeo}(X)$ où $\text{Homéo}(X)$ est le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique $X$.

L'espace topologique quotient $X/G$ est l'ensemble $X/G$ muni de la "topologie quotient", c'est à dire de la topologie la plus fine qui rende la projection $p : X \to X/G$ continue.

On dit que l'action continue de $G$ dans $X$ est *propre* si pour tout compact $K$ de $X$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.K \cap K \neq \emptyset$ est fini.

**Proposition :** Soit $X$ un espace topologique séparé et localement compacte. Soit $G$ un groupe agissant librement et proprement dans $X$. Alors l'espace topologique quotient est séparée.

**Preuve (Exercice) :**

c) Soit maintenant $V$ une variété différentiable. Une action différentiable de $G$ dans $V$ est la donnée d'un homomorphisme de groupe $\rho : G \to \text{Diff}(V)$ où $\text{Diff}V$ est le groupe des difféomorphismes de la variété $V$.

**Proposition :** Supposons que l'action différentiable soit libre et propre. Il existe sur l'espace quotient $V/G$ une unique structure de variété différentiable qui fasse de la proposition $p : V \to V/G$ un difféomorphisme local.

- On l'appelle la variété quotient et on la note $V/G$.

**Preuve :** On sait déjà que $V/G$ est séparée, évidemment union dénombrable de compacts (comme $V$).

Tout point de $V$ possède un voisinage $U$ tels que $gU \cap U = \emptyset$ pour $g \neq 1$. Il en résulte que la projection $p : U \to p(U)$ est un homéomorphisme. Donc d'une part $V/G$ est une variété topologique et la famille $(p(U), \varphi o p^{-1})$ où $\varphi$ est une carte de $V$ contenant $U$, un atlas différentiable de $V/G$. □

## V. Anneau des fonctions différentiables

Soit $V$ une variété différentiable. On note $\mathcal{C}^\infty(V;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions différentiables de $V$ dans $\mathbb{R}$. L'addition et la multiplication point par point en font un anneau commutatif unitaire.

V-1. **Proposition.** Il existe des fonctions différentiables non constantes.

**Preuve :** Soit $v \in V$ un point de $V$ et $(U, \varphi)$ une carte de $V$ contenant $v$.

Il existe (fonction bosse) une fonction différentiable $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dont le support est contenu dans l'ouvert $\varphi(U) = \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ et telle que

$h(\varphi(v)) = 1$. On considère alors la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) & = h \circ \varphi(x) \qquad x \in U \\ f(x) & = 0 \quad x \notin U \end{cases}$$

C'est bien une fonction non constante de $V$ dans $\mathbb{R}$. $\square$

En fait on a beaucoup plus.

V-2. **Théorème.** Existence de partitions de l'unité.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentiable $V$. Pour chaque indice $i \in I$ il existe une fonction différentiable $f_i \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ satisfaisant les conditions suivantes.

1) $f_i \geq 0$ et support $f_i \subset U_i$

2) La famille $(\text{Supp} f_i)_{i \in I}$ est localement finie ce qui signifie que tout point de $V$ possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de tels supports

3) $\sum_{i \in I} f_i = 1$

**Preuve :** (Voir par exemple le cours de Laudenbach).

# CHAPITRE V

## Formes différentielles sur les variétés

### I. Espace tangent

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$ et $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de $M$. On note par $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ le difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ et $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in M$ un point de $M$ et $I_x$ l'ensemble (non-vide) des indices $i$ tels que $x \in U_i$. On définit la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble $I_x \times \mathbb{R}^n$:

$$(i, v) \sim (j, w) \qquad \iff w = d{\varphi_{ij}}_{\varphi_i(x)}(v).$$

**Exercice:** vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

**Définition 1.** L'espace quotient

$$I_x \times \mathbb{R}^n / \sim$$

s'appelle *l'espace tangent à $M$ en $x$*. Il est noté $T_xM$.

Pour tout indice $i \in I_x$ on peut définir une bijection $\psi_i : \mathbb{R}^n \to T_xM$ par

$$v \mapsto \psi_i(v) := \overline{(i, v)}.$$

Du fait que (exercice)

$$\psi_i^{-1} \circ \psi_j = d{\varphi_{ij}}_{\varphi_i(x)} \tag{1}$$

est une application linéaire quels que soient $i, j \in I_x$, l'espace $T_xM$ a une structure naturelle d'espace vectoriel réel de dimension $n$.

**Remarque 2.** L'espace tangent dépend (en apparence) du choix de l'atlas qui définit la structure différentiable de $M$. Il est néanmoins facile à vérifier que si $\mathcal{U}' = (U'_j, \varphi'_j)_{j\in J}$ est un atlas équivalent à $\mathcal{U}$, alors les espaces tangents construits à l'aide de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont canoniquement isomorphes en tant qu'espaces vectoriels.

L'union (disjointe)

$$TM := \bigsqcup_{x\in M} T_xM$$

de tous les espaces tangents s'appelle le *fibré tangent*.

**Exemple:** Si $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace tangent à $M$ en chaque point $x$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{R}^n$, en utilisant l'atlas à un seul élément donné par l'inclusion de $M$ dans $\mathbb{R}^n$. Le fibré tangent de $U$ s'identifie alors à $U \times \mathbb{R}^n$.

## II. Différentielle d'une fonction

**Rappel:** Si $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des fonctions $C^\infty$ entre des ouverts de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x), \qquad \forall i \in \overline{1,p},\ j \in \overline{1,m},\ x \in U$$

s'écrit de manière condensée

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x, \qquad \forall\ x \in U. \tag{2}$$

Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables de dimensions $m$ et $n$ avec des atlas $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{U}' = (U'_j, \varphi'_j)_{j \in J}$ et soit $f : M \to N$ une fonction $C^\infty$. On rappelle que cela signifie que pour tous $x \in M$, $U_i$ contenant $x$ et $U'_j$ contenant $f(x)$, la fonction $\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est une fonction $C^\infty$ entre des ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.

**Proposition-Définition.** La différentielle de $f$ est l'application $df : TM \to TN$ définie par

$$df(X) = \psi'_j \circ d(\varphi'_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)} \circ \psi_i^{-1}(X) \tag{3}$$

pour tous $x \in M$, $X \in T_xM$, $U_i$ contenant $x$ et $U'_j$ contenant $f(x)$. En particulier, si $f$ est une fonction à valeurs réelles, on a

$$df(X) = d(f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)} \circ \psi_i^{-1}(X). \tag{4}$$

**Preuve.** Les relations (1) et (2) montrent que la définition de $df(X)$ ne dépend pas des choix de $U_i$ et $U'_j$.

On remarque que $df$ est une application linéaire entre $T_xM$ et $T_{f(x)}N$ quel que soit $x \in M$. Un calcul simple montre que la relation (2) continue à être vérifiée: si $M, N, P$ sont des variétés différentiables et $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont des fonctions différentiables, alors

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x, \qquad \forall\ x \in M. \tag{5}$$

## III. Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction $C^\infty$, notée $X$, définie sur $U$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. L'image d'un point $x \in U$ par $X$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ vu comme élément de l'espace tangent $T_xU$. Cette notion se généralise aisément aux variétés:

**Définition 3.** Un *champ de vecteurs* sur une variété différentiable $M$ est une application $X : M \to TM$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(i) $X(x) \in T_xM$ quel que soit $x \in M$.

(ii) $X$ est différentiable, dans le sens suivant: pour chaque carte $(U_i, \varphi_i)$, l'application de $\varphi_i(U_i)$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$y \mapsto \psi_i^{-1} \circ X \circ \phi_i^{-1}(x)$$

est $C^\infty$. Autrement dit, l'expression de $X$ dans chaque carte doit être $C^\infty$.

**Remarque.** Sur l'intersection de deux cartes, $U_i \cap U_j$, on a d'après ce qui précède

$$\psi_i^{-1} \circ X \circ \phi_i^{-1}(y) = d\varphi_{ij_y} \circ \psi_j^{-1} \circ X \circ \phi_j^{-1} \circ \varphi_{ij}(y), \qquad \forall y \in \varphi_i(U_i \cap U_j),$$

donc la définition de la différentiabilité des champs de vecteurs ne dépend pas du choix de la carte.

## IV. Formes différentielles

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$. Pour chaque $x \in M$ on définit $\Lambda_x^k(M) := \Lambda^k(T_xM^*)$. Un élément de $\Lambda_x^k(M)$ est donc une application $k$-linéaire alternée sur $T_xM$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'union disjointe

$$\Lambda^k(M) := \bigsqcup_{x \in M} \Lambda_x^k(M)$$

s'appelle le fibré extérieur de degré $k$.

**Définition 4.** Une *$k$-forme différentielle* sur une variété différentiable $M$ est une application $\omega : M \to \Lambda^k(M)$ satisfaisant les propriétés suivantes:

(i) $\omega(x) \in \Lambda_x^k(M)$ quel que soit $x \in M$.

(ii) $X$ est différentiable, dans le sens suivant: la fonction $x \mapsto \omega(x)(X_1(x), \ldots, X_k(x))$ est $C^\infty$ quels que soient les champs de vecteurs $(C^\infty)$ $X_1, \ldots, X_k$ sur $M$.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des $k$-formes différentielles est noté par $\Omega^k(M)$.

Si $U$ est un ouvert de $M$, la restriction à $U$ définit une application linéaire $\Omega^k(M) \to \Omega^k(U)$.

**Exemple fondamental.** Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction $C^\infty$, sa différentielle $df : TM \to T\mathbb{R}$ définit une 1-forme différentielle. En effet, d'après (4), si $X$ est un champ de vecteurs $C^\infty$ sur $M$, la fonction $x \mapsto df_x(X(x))$ s'écrit dans une carte $(U, \varphi)$

$$df_x(X(x)) = d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \circ \psi^{-1}(X(x)) = F(\varphi(x)) \tag{6}$$

où on a noté par $F$ la fonction sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$

$$F(y) = d(f \circ \varphi^{-1})_y \circ \psi^{-1}(X(\varphi^{-1}(y)))$$

qui est $C^\infty$ d'après la définition 3.

En particulier, si on note par $x_i : U \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ les composantes de la carte $\varphi$, on obtient des 1-formes $dx_i \in \Omega^1(U)$.

**Proposition 5.** *Les 1-formes $dx_i$, $i = \overline{1, n}$ forment une base de $\Lambda^1(U)$ en chaque point.*

**Preuve.** Soit $x \in U$ et $\psi : \mathbb{R}^n \to T_xM$ l'isomorphisme définit par la carte $\varphi$. Comme $x_i \circ \varphi^{-1}$ est la $i$-ème coordonnée sur $\mathbb{R}^n$, la relation (4) montre que $dx_i(x)(\psi(e_j)) = \delta_{ij}$, où $\{e_j\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

D'après le Corollaire II-4 du premier chapitre, les $k$-formes

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$$

forment un base de $\Lambda^k(U)$ en chaque point. On constate qu'on peut travailler (localement) avec les formes différentielles sur les variétés comme sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

**Définition 6.** Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables et soit $f : M \to N$ une fonction $C^\infty$. Si $\omega \in \Omega^k(N)$ est une $k$-forme différentielle sur $N$, on définit son *image réciproque* $f^*\omega \in \Omega^k(M)$ par

$$(f^*\omega)_x(X_1, \ldots, X_k) = \omega_{f(x)}(df_x(X_1), \ldots, df_x(X_k)),$$

quel que soit $x \in M$ et les vecteurs tangents $X_i \in T_xM$.

La vérification du fait que $f^*\omega$ est $C^\infty$ est facile et laissée au lecteur. Comme pour le cas des formes sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, il est clair que $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ est $\mathbb{R}$-linéaire et satisfait $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$ quelles que soient $\alpha, \beta \in \Omega^*(N)$. De plus, l'image réciproque satisfait

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* \tag{7}$$

grâce à la relation (5).

## V. Différentielle extérieure

**Théorème 7.** *Soit $M$ une variété différentiable. Il existe une unique application $\mathbb{R}$-linéaire $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ satisfaisant les conditions suivantes:*

*(i)* $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M) \quad \forall p \geq 0$.

*(ii)* $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ *est la différentielle des fonctions qui a été définie dans* (4).

*(iii)* $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta), \qquad \forall \alpha \in \Omega^p(M),\ \beta \in \Omega^*(M)$.

*(iv)* $d \circ d = 0$.

*(v) Si* $f : M \to N$ *est une application différentiable, alors* $d \circ f^* = f^* \circ d$.

**Preuve.** L'unicité résulte immédiatement de la condition (v). En effet, en considérant les inclusions des cartes $U_i \to M$, on voit que $d$ sur $M$ est déterminé par $d$ sur les $U_i$, qui à son tour est déterminé par $d$ sur les ouverts $\varphi_i(U_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour montrer l'existence, on remarque que la donnée d'une forme différentielle sur $M$ est équivalente à la donnée de formes différentielles $\omega_i$ sur les cartes $U_i$ qui coincident sur les intersections: $\omega_i|_{U_i \cap U_j} = \omega_j|_{U_i \cap U_j}$. Soit alors $\omega \in \Omega^p(M)$. On définit la $(p+1)$-forme $\sigma_i$ sur $U_i$ par

$$\sigma_i := \varphi_i^*(d((\varphi_i^{-1})^*\omega)),$$

où l'opérateur $d$ dans le membre droit est la différentielle extérieure habituelle sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi_{ji} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est le difféomorphisme entre les ouverts $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ et $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^n$, la relation de fonctorialité (7) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sigma_i|_{U_i \cap U_j} &= \varphi_i^*(d((\varphi_i^{-1})^*\omega)) = \varphi_j^*(\varphi_{ij}^* d((\varphi_i^{-1})^*\omega)) \\ &= \varphi_j^*(d(\varphi_{ij}^*(\varphi_i^{-1})^*\omega)) = \varphi_j^*(d((\varphi_j^{-1})^*\omega)) \\ &= \sigma_j|_{U_i \cap U_j}, \end{aligned}$$

donc la collection $(\sigma_i)$ définit bien une $p+1$-forme sur $M$, qu'on appelle $d\omega$. La vérification des propriétés (i)–(v) résulte directement des propriétés analogues de $d$ sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

# CHAPITRE VI

## Cohomologie de De Rham sur les variétés

La théorie de la cohomologie de De Rham sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ se transpose sans difficulté sur les variétés. Plus précisément, les définitions et résultats du chapitre III restent vrais en remplacant les ouverts de $\mathbb{R}^n$ dans chaque enoncé par des variétés de dimension $n$, sauf pour les suites exactes de Mayer-Vietoris en cohomologie simple et à support compact (Proposition II-3 et son corollaire, Théorème III-2 et Corollaire III-2), ou au lieu de "$U$ et $V$ ouverts de $\mathbb{R}^n$ il faut lire "$U$ et $V$ ouverts d'une variété de dimension $n$".

## CHAPITRE VII

## THÉORÈMES CLASSIQUES

### I. Inexistence de champs de vecteurs jamais nul sur les sphères de dimension paire

I-1. **Lemme.** Soit $S^n$ la sphère de dimension $n$ $n \geq 1$ et soit $I : S^n \to S^n$ l'application antipodale définie par $I(M) = -M \in S^n$.

L'application induite $I^* : H^n(S^n) \to H^n(S^n)$ est la multiplication par $(-1)^{n+1}$.

I-2. **Sous-Lemme I-2.** Soit $J : S^n \to S^n$ la symétrie hyperplane définie par

$$J(x_1, \cdots x_{n+1}) = -x_1, \cdots x_n, x_{n+1}$$

L'application induite $J^* : H^n(S^n) \to H^n(S^n)$ est la multiplication par $-1$.

**Preuve du sous-lemme :**

Puisque le difféomorphisme $J$ respecte le recouvrement de la sphère $S^n$ par $U^+$ et $U^-$ (voir chapitre VI).

On a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "(J/S^{n-1})^*"] & H^{n-1}(U^+ \cap U^-) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\partial", "\sim"'] \arrow[d, "J^*"] & H^n(S^n) \arrow[d, "J^*"] \\
H^{n-1}(S^{n-1}) & H^{n-1}(U^+ \cap U^-) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\partial", "\sim"'] & H^n(S^n)
\end{tikzcd}$$

où $\partial$ est un isomorphisme dès que $n \geq 2$. On obtient donc en itérant par rapport à $n$ le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
H^1(S^1) \arrow[r, "\partial\circ\partial\cdots\partial", "\sim"'] \arrow[d, "(J/S^1)^*"] & H^n(S^n) \arrow[d, "J^*"] \\
H^1(S^1) \arrow[r, "\partial\circ\partial\cdots\partial", "\sim"'] & H^n(S^n)
\end{tikzcd}$$

où $J/S^1$ est l'application $(x_1, x_1) \to (-x_1, x_2)$.

On constate que

$$(J/S^1)^* \left( \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = -\frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_1^2} \quad \square$$

**Preuve du Lemme I.1**

Notons $J_i : S^n \to S^n i \in \{1, 2, n+1\}$ la symétrie hyperplan définie par

$$J_i(x_1, \cdots x_i, \cdots x_{n+1}) = (x_1 \cdots, -x_i, \cdots x_{n+1})$$

Les $(n+1)$ symétries hyperplans $J_i$ sont toutes homotopes entre elles (Pourquoi ?). On a donc d'une part $J_i^* = J_{i'}^* \forall i, i'$ et d'autre part $I = J_1 \circ J_2 \circ \cdots \circ J_{n+1}$. On a donc bien que $I^* = (J^*)^{n+1}$ est la multiplication par $(-1)^{n+1}$. $\square$

I-3. **Théorème.** Tout champ de vecteurs différentiable sur la sphère $S^{2n}$ s'annule.

**Preuve :** Supposons le contraire. C'est à dire qu'il existe une application différentiable $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que le vecteur $f(M)$ soit non nul et orthogonal au vecteur $0\vec{M}$ pour tout $M$ de $S^n$.

Notons $g : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'application (différentiable) définie par $g(M) = \frac{f(M)}{\|f(M)\|}$ et considérons l'application $F$ de $S^n \times \mathbb{R} \to S^n$ définie par

$$F(M, t) = \sin t g(M) + \cos t 0\vec{M}$$

C'est une homotopie entre

$$F(-, 0) = Id_{S^n} \text{et} F(-, 1) = J$$

On a donc $J^* = Id^*$. Mais $Id^* = Id$ et $J^* = (-1)^{n+1} Id$ de $H^n(S^n)$. D'où la contradiction. $\square$

Pour les deux théorèmes qui vont suivre, il convient d'étendre aux applications continues la définition de l'image réciproque d'une forme différentielle.

Soient $V$ et $W$ deux variétés différentiables.

**Lemme :** Soit $f : V \to W$ une application continue

1) il existe une application différentiable $g$ continuement homotope à $f$.

2) Si $g_1$ et $g_2$ sont deux applications différentiables, continuement homotopes, elles le sont différentiablement.

Pour $f$ continue de $V$ dans $W$, le lemme précédent permet de définir l'homomorphisme $f^* : H^*(W) \to H^*(V)$ en posant (par définition)

$f^* = g^*$ où $g$ est n'importe quelle application différentiable, continuement homotope à l'application $f$.

## II. Théorème dit "d'invariance du domaine"

Nous avons vu au chapitre IV que si un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^p$ alors $n = p$. Qu'en est-il si on remplace difféomorphisme par homéomorphisqme ? Les variétés topologiques ont-elles une dimension ?

II-1. **Théorème.** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ un homéomorphisme. Alors $n = p$.

Avant de donner la preuve démontrons un cas particulier

II-2. **Lemme.** $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ ne sont pas homéomorphes pour $n \neq p$.

**Preuve du lemme :** Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ un homéomorphisme et $x \in \mathbb{R}^n$ un point de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'homéomorphisme

$$\bar{h} : \mathbb{R}^n - \{x\} \to \mathbb{R}^p - \{h(x)\} .$$

Cet homéomorphisme induit un isomorphisme linéaire $\bar{h}^*$ entre les groupes de cohomologie $H^i(\mathbb{R}^p - \{h(x)\})$ et $H^i(\mathbb{R}^n - \{x\})$ pour tout $i$. Mais $n - 1 = \sup i$ tels que $H^i(\mathbb{R}^n - \{x\}) = H^i(S^{n-1})$ soit non nul et $p - 1 = \sup i$ tels que $H^i(\mathbb{R}^p - \{h(x)\}) = H^i(S^{p-1})$ soit non nul. $\square$

**Preuve du Théorème :**

Soit donc $h : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^p$ un homéomorphisme.

- Considérons une boule ouverte $B$ centrée en $x$ et contenue dans $U$

- Considérons une boule ouverte $B'$ centrée en $h(x)$ et contenue dans $h(B)$.

- Considérons une boule ouverte $C$ centrée en $x$ et contenue dans $h^{-1}(B')$ d'où le diagramme d'espaces :

$$\begin{array}{ccc}
U - \{x\} & \xrightarrow{h_1} & V - \{h(x)\} \\
\cup & & \cup \\
B - \{x\} & \xrightarrow{h_2} & h(B) - \{h(x)\} \\
i \circlearrowleft & & \circlearrowleft j \\
C - \{x\} & \xrightarrow{h_3} & B' - \{h(x)\}
\end{array}$$

où $h_1, h_2, h_3$ désignent les restrictions de l'homéomorphisme $h$ aux ouverts correspondants.

L'inclusion de $C-\{x\}$ dans $B-\{x\}$ est une équivalence d'homotopie, tandis que $h_2$ est un homéomorphisme. D'où en passant à la cohomologie, le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \simeq H^{n-1}(B - \{x\}) \arrow[d, "i^*"', "S"] & H^{n-1}(h(B) - \{h(x)\}) \arrow[l, "h_2^*"', "\sim"] \arrow[d, "j^*"] \\
H^{n-1}(C - \{x\}) & H^{n-1}(B' - \{h(x)\}) \simeq H^{n-1}(S^{p-1}) \arrow[l, "h_1^*"']
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme non nul $i^* \circ h_2^*$ qui est égal à $h_1^* \circ j^*$ interdit la nullité du groupe $H^{n-1}(B' - \{h(x)\})$. On a donc $n-1 = p-1$ $\square$

## III. Théorème du point fixe de Brouwer

III-1. **Théorème.** Notons $\mathbb{D}^{n+1}$ le disque fermé $\mathbb{D}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \|x\| \leq 1\}$. Toute application continue $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{D}^{n+1}$ possède un point fixe.

**Preuve :** par l'absurde

Soit donc $f : \mathbb{D}^{n+1} \to \mathbb{D}^{n+1}$ sans point fixe.

On note $r : \mathbb{D}^{n+1} \to S^n$ l'application qui à tout point $x$ de $\mathbb{D}^{n+1}$ associe l'intersection de la demie-droite $f(x)x$ avec $S^n$. C'est une application continue (Pourquoi ?) qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{D}^{n+1} \arrow[dr, "r"] & \\
S^n \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "Id"] & & S^n
\end{tikzcd}$$

où $i$ est l'inclusion de la sphère $S^n$ dans le disque $\mathbb{D}^{n+1}$.

Prolongeons $r : \mathbb{D}^{n+1} \to S^n$ en $R : \mathbb{R}^{n+1} \to S^n$ en posant :

$$\begin{aligned}
R(X) &= \tfrac{X}{\|X\|} \text{ si } \|X\| \geq 1 \\
R(X) &= r(X) \text{ si } \|X\| \leq 1
\end{aligned}$$

On obtient le diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^{n+1} \arrow[dr, "R"] & \\
S^n \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "Id"] & & S^n
\end{tikzcd}$$

où cette fois $i$ est l'inclusion de $S^n$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$

On passe à la cohomologie

$$\begin{tikzcd} & H^n(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[dl, "i^*"'] & \\ H^n(S^n) & & H^n(S^n) \arrow[ul, "\mathbb{R}^*"'] \arrow[ll, "Id", "\sim"'] \end{tikzcd}$$

Le groupe $H^n(\mathbb{R}^{n+1})$ est nul et $H^n(S^n)$ ne l'est pas pour $n > 0$. Contradiction. $\square$

# CHAPITRE VIII

## ORIENTATION - INTÉGRATION - FORMULE DE STOKES

### I. ORIENTATION

Soit $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un autre. On appelle Jacobien de $\varphi$ au point $u \in U$, qu'on note $J(\varphi)(u)$, le déterminant de l'application linéaire inversible $D\varphi(u)$.

I-1. **Proposition.** Soit $V$ une variété différentiable de dimension $n$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

i) $V$ possède un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que toutes les applications de changement de cartes sont à Jacobien positif. On dira que l'atlas est orientable

ii) Il existe sur $V$ une $n$-forme différentielle $\omega \in \Omega^n(V)$ nulle en aucun point.

**Preuve :** *ii)* $\Rightarrow$ *i)* Soit donc $\omega$ une $n$-forme différentielle sur $V$, jamais nulle et soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas quelconque (mais où les ouverts $U_i$ sont supposés connexes) définissant $V$.

Considérons la forme $(\varphi_i^{-1})^*(\omega/U_i)$. C'est une $n$-forme différentielle sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, qui ne s'annule pas sur cet ouvert. Elle est donc multiple par une fonction jamais nulle (donc de signe constant) de la forme $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

$$(\varphi_i^{-1})^*(\omega/U_i) = f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

Posons alors $\varphi'_i = \varphi_i$ si $f_i$ est positive et $\varphi'_i = S \circ \varphi_i$ si $f_i$ est négative où $S$ est, par exemple, la symétrie $(x_1, x_2 \cdots x_n) \to (-x_1, x_2 \cdots x_n)$. Les $(U_i, \varphi'_i)_{i\in I}$ forment bien un atlas équivalent à l'atlas initial $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ (puisque $S$ est un difféomorphisme) et qui satisfait i).

En effet $(\varphi'_i \circ \varphi'^{-1}_j)^* dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_n$ est un multiple positif de $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots dx_n$ ce qui montre que le Jacobien $J(\varphi'_i \circ \varphi'^{-1}_j)$ est bien positif en tout point.

$$i) \Rightarrow ii)$$

Soit $f_i$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $U_i$ de la variété $V$ et posons

$$\omega = \sum_{i \in I} f_i \times \varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n)$$

Soit $v \in V$. Pour chaque indice $i$ tel que $v \in U_i$ les différentes $n$-formes alternées $\varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n)(v)$ de $T_v V$ sont toutes multiples positives de l'une d'entre elles notée $\lambda$. $\varphi_i^*(dx_1 \wedge dx_1 \ldots dx_n) = \rho_i \lambda > 0$.

Comme les $f_i(v)$ sont positifs ou nuls et que leur somme vaut 1, $\omega(v)$ est bien non nulle. □

I-2. **Définition.** Une variété $V$ satisfaisant l'une ou l'autre des conditions de la Proposition I.1 est dite *orientable*.

I-3. **Remarque importante.** Il résulte de la démonstration de la proposition qu'une variété est orientable si et seulement si tout atlas est "redressable" - ce qui signifie qu'en remplaçant éventuellement certaines cartes $\varphi_i$ par $S \circ \varphi_i$, le nouvel atlas est orientable.

I-4. **Applications. Exercice.** $\mathbb{R}P(2)$ n'est pas orientable.

I-5. **Définition.** Une variété différentiable *orientée* est une variété munie d'une classe d'équivalence d'atlas orienté, ou, ce qui revient au même, d'une $n$-forme différentielle jamais nulle définie à un facteur multiplicatif positif près, où $n = \dim V$.

## II. Intégration

Soit $V$ une variété différentiable orientée de dimension $n$ que nous noterons $[V]$ pour indiquer que l'orientation a été choisie et soit $\omega \in \Omega_c^n(V)$ une $n$-forme différentielle à support compacte. Nous allons définir une forme linéaire $I : \Omega_c^n(V) \to \mathbb{R}$ appelée intégrale

$$\omega \mapsto \int_{[V]} \omega \ .$$

**Premier cas :** Supposons que le support de la forme $\omega$ est contenu dans un ouvert de carte $U_{i_0}$ d'un atlas orienté $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ de $V$ la forme $(\varphi_{i_0}^{-1})^* \omega \in \Omega_c^n(\varphi_{i_0}(U_{i_0}))$ s'écrit $f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \wedge dx_2 \cdots \wedge dx_n$ où $f$ est une fonction à support compact contenu dans l'ouvert $\varphi_{i_0}(U_{i_0})$ de $\mathbb{R}^n$.

On pose alors

$$\int_{[V]} \omega = \int_{[U_{i_0}]} \omega = \int_{\varphi_{i_0}(U_{i_0})} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Si le support de la forme $\omega$ est contenu dans un autre ouvert de carte $(U_{i_1}, \varphi_{i_1})$ on a bien

$$\int_{\varphi_{i_0}(U_{i_0})} (\varphi_{i_0}^{-1})^* \omega = \int_{\varphi_{i_1}(U_{i_1})} (\varphi_{i_1}^{-1})^* \omega$$

En effet l'atlas étant orienté le Jacobien $J(\varphi_{i_1}^{-1} \circ \varphi_{i_0})$ est toujours positif. L'égalité suit alors de la formule de changement de variables dans les intégrales multiples que nous rappellons ci-dessous.

Soit $h : \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un autre et soit $f : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ une fonction à support compact.

On a

$$\int_{\mathcal{O}'} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{O}} |J(h)| (f \circ h) dx_1 \cdots dx_n \square$$

Par ailleurs si $\omega \in \Omega_c^n(\mathcal{O}')$ est la forme $f dx_1 \wedge dx_1 \ldots \wedge dx_n$, la forme $h^*(\omega) \in \Omega_c^n(\mathcal{O})$ est la forme $J(h) f \circ h dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. $\square$

**Cas général :** Soit donc $\omega \in \Omega_c^n(V)$. Soient $(U_i, \varphi_i)$ un atlas *orienté* de $V$ et $\alpha_i$, une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_i$. On pose

$$\int_{[V]} \omega = \sum_i \int_{[V]} \alpha_i \omega \ .$$

Cette définition est bien indépendante et de l'atlas orienté choisi dans sa classe d'équivalence et de la partition de l'unité $\alpha_i$. En effet soient $(U'_{j'}, \varphi'_{i'})$ un autre atlas équivalent et $\alpha'_{i'}$ une partition de l'unité subordonnée à ce nouveau recouvrement $U'_{i'}$.

On a

$$\sum_i \int_{[V]} \alpha_i \omega = \sum_i \int_{[U_i]} \alpha_i \omega = \sum_i \int_{[U_i]} (\sum_{i'} \alpha'_{i'}) \alpha_i \omega$$
$$= \sum_{i,i'} \int_{U_i \cap U'_i} \alpha'_i \alpha_i \omega = \cdots = \sum_{i'} \int_{[V]} \alpha'_{i'} \omega \square$$

II-1. **Remarque.** La définition précédente de l'intégration (satisfaisante d'un point de vue théorique) a l'air en revanche extrêmement difficile à manier en pratique.

En fait on a très rarement besoin de "calculer" effectivement de telles intégrales. Par ailleurs, on sait bien qu'en intégrant, on peut négliger les ensembles de mesure nulle. Cette remarque facilite beaucoup les calculs car très fréquemment, une variété à laquelle on enlève certains fermés de mesure nulle possède alors un atlas très simple (Voir Exercices).

## III. FORMULE DE STOKES (VERSION FAIBLE)

III-1. **Théorème.** Soit $[V]$ une variété *orientée* de dimension $n$ et soit $\eta \in \Omega_c^{n-1}(V)$.

Alors $\int_{[V]} d\eta = 0$.

**Démonstration :** Soit $\alpha_i$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)$ d'un atlas orienté de $[V]$. On a $\eta = \sum_i \alpha_i \eta$ et donc $d\eta = \sum_i d(\alpha_i \eta)$.

Il suffit donc de montrer que $\int_{[V]} d(\alpha_i \eta) = 0$ pour tout $i$.

Cette nullité est une conséquence immédiate du lemme suivant :

III-2. **Lemme.** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathcal{O})$. Alors $\int_{[\mathcal{O}]} d\eta = 0$.

**Preuve :** $\eta$ s'écrit

$$\eta(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où les fonctions $f_i$ sont à support compact.

Par linéarité il suffit de montrer par exemple que

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

mais

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1, \cdots x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [f_n(x_1, \cdots x_{n-1}, +\infty) - f_n(x_1, \cdots x_{n-1}, -\infty)] dx_1 \cdots dx_{n-1} = 0$$

(car $f_n$ est a support compact). $\square$

III-3. **Conséquence.** Le théorème précédent signifie exactement que la forme linéaire intégration $I : \Omega_c^n(V) \to \mathbb{R}$ est nulle sur le sous-espace $d(\Omega_c^{n-1}(V))$.

Cette forme linéaire "passe donc au quotient" et fournit une forme linéaire (encore notée $I$, et encore appelée intégration).

$$I : H_c^n(V) \to \mathbb{R}.$$

Nous verrons au prochain chapitre que cette forme linéaire est "presque toujours" un isomorphisme.

# CHAPITRE IX

## Dualité de Poincaré

### I. Quelques résultats d'algèbre homologique

**Lemme 1.** (Lemme des 5) *Considérons un diagramme commutatif d'applications linéaires entre espaces vectoriels*

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_1 & \xrightarrow{f_1} & E_2 & \xrightarrow{f_2} & E_3 & \xrightarrow{f_3} & E_4 & \xrightarrow{f_4} & E_5 \\
\downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_5} \\
F_1 & \xrightarrow{g_1} & F_2 & \xrightarrow{g_2} & F_3 & \xrightarrow{g_3} & F_4 & \xrightarrow{g_4} & F_5
\end{array}$$

*tel que:*

- *Les suites horizontales sont exactes.*
- *Les applications $h_1, h_2, h_4$ et $h_5$ sont des isomorphismes.*

*Alors $h_3$ est un isomorphisme.*

**Preuve.** Les hypothèses nous permettent d'écrire les implications suivantes:

$$\begin{aligned}
h_3(x) = 0 &\implies g_3(h_3(x)) = 0 \implies h_4(f_3(x)) = 0 \implies f_3(x) = 0 \\
&\implies \exists x',\ f_2(x') = x \implies g_2(h_2(x')) = 0 \implies \exists y',\ g_1(y') = h_2(x') \\
&\implies h_2(f_1(h_1^{-1}(y'))) = g_1(h_1(h_1^{-1}(y'))) = g_1(y') = h_2(x') \\
&\implies x' = f_1(h_1^{-1}(y')) \implies x = f_2(f_1(h_1^{-1}(y'))) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'injectivité de $h_3$. Pour vérifier la surjectivité, soit $y \in F_3$. Il existe $x \in E_4$ tel que $h_4(x) = g_3(y)$. On a donc

$$h_5(f_4(x)) = g_4(h_4(x)) = g_4(g_3(y)) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}
f_4(x) = 0 &\implies \exists x',\ f_3(x') = x \implies g_3(h_3(x')) = h_4(f_3(x')) = h_4(x) = g_3(y) \\
&\implies g_3(y - h_3(x')) = 0 \implies \exists y',\ y - h_3(x') = g_2(y') \\
&\implies y = h_3(x') + g_2(y') = h_3(x') + h_3(f_2(h_2^{-1}(y'))),
\end{aligned}$$

donc $h_3$ est surjective.

$\square$

La preuve du résultat suivant est facile et laissée comme exercice au lecteur.

**Lemme 2.** *Soit $G$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et*

$$E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n$$

*et*

$$F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_n$$

*des suites exactes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors les suites suivantes sont exactes:*

$$E_n^* \longrightarrow E_{n-1}^* \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_1^*$$

$$E_1 \oplus F_1 \longrightarrow E_2 \oplus F_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n \oplus F_n$$

$$E_1 \otimes G \longrightarrow E_2 \otimes G \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n \otimes G$$

**Lemme 3.** *Si*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

*est une suite exacte de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $E$ et $G$ sont de dimension finie, alors $G$ est de dimension finie.*

**Preuve.** On a $\mathrm{im}(g) \simeq F/\ker(g) = F/\mathrm{im}(f)$ et d'autre part $\mathrm{im}(g) \subset G$, ainsi que $\mathrm{im}(f) \simeq E/\ker(f)$ sont de dimension finie.

$\square$

## II. Variétés de type fini

**Définition 4.** On dit qu'une variété différentiable $M$ de dimension $n$ est *de type fini* s'il existe un recouvrement (appelé admissible) de $M$ par un nombre fini d'ouverts $U_1, \ldots, U_k$ avec la propriété que toutes les intersections non-vides de la forme $U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_l}$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}^n$. Le cardinal minimal d'un recouvrement ouvert admissible s'appelle le *type minimal* de $M$.

**Exemples.** 1. La sphère $S^n$ est de type fini. On peut prendre le recouvrement ouvert défini par

$$U_i^{\pm} = \{x \in S^n \ , \ \pm x_i > 0\}, \qquad 1 \leq 1 \leq n+1$$

(vérifier que c'est un recouvrement admissible).

2. Plus généralement, toute variété compacte est de type fini. On construit un recouvrement admissible à l'aide d'une métrique riemannienne et de voisinages géodésiquement convexes.

3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ ne sont pas de type fini (voir la proposition 6 ci-dessous).

Le résultat qui suit, couplé avec la suite exacte de Mayer-Vietoris et le Lemme des 5, est la clé pour la plupart des théorèmes concernant la cohomologie des variétés de type fini:

**Lemme 5.** *Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$ de type fini. Si $M$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, il existe un recouvrement à deux ouverts $U$ et $V$ de $M$ tel que à la fois $U$, $V$ et $U \cap V$, soient de type minimal strictement inférieur à celui de $M$.*

**Preuve.** Soit $k \geq 2$ le type minimal de $M$ et $U_1, \ldots, U_k$ un recouvrement ouvert admissible. On définit $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \ldots \cup U_k$. Il est clair que $U$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ (donc de type minimal égal à 1) et $V$ et $U \cap V$ ont des recouvrements admissibles de cardinal $k - 1$.

$\square$

**Proposition 6.** *La cohomologie d'une variété de type fini est de dimension finie.*

**Preuve.** Par récurrence sur le type minimal de la variété. L'initialisation étant évidente, supposons que le résultat est vrai pour les variétés de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit $M$ une variété de type minimal $k$. On utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris au recouvrement ouvert donné par le lemme 5:

$$H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(M) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V)$$

pour conclure que $H^p(M)$ est de dimension finie pour tout $p$, grâce au lemme 3.

$\square$

## III. Dualité de Poincaré et Formule de Künneth

**Théorème 7.** (Dualité de Poincaré) *Soit $M$ une variété orientée de type fini de dimension $n$. L'application linéaire $\varphi : \Omega^p(M) \to (\Omega_c^{n-p}(M))^*$ définie par*

$$\varphi(\omega)(\tau) = \int_M \omega \wedge \tau, \qquad \forall \omega \in \Omega^p(M),\ \tau \in \Omega_c^{n-p}(M)$$

*induit un isomorphisme $\varphi : H^p(M) \to (H_c^{n-p}(M))^*$.*

**Preuve.** Il faut tout d'abord vérifier que l'application bilinéaire

$$([\omega], [\tau]_c) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau$$

ne dépend pas du choix de $\omega \in \mathcal{Z}^p(M),\ \tau \in \mathcal{Z}_c^{n-p}(M)$. (exercice)

Pour montrer que l'application induite $\varphi : H^p(M) \to (H_c^{n-p}(M))^*$ est un isomorphisme, on procède par récurrence sur le type minimal de $M$. L'initialisation revient au fait (bien connu maintenant) que

$$[\omega] \in H_c^n(\mathbb{R}^n) \mapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}$$

est un isomorphisme. On suppose que le résultat est vrai pour les variétés de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit $M$ une variété de type minimal $k$. On écrit une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant au recouvrement ouvert donné par le lemme 5:

$$H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) \longrightarrow H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(M)$$

$$\longrightarrow H^p(M) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V)$$

ainsi que une partie du dual de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie à support compact (lemme 2) correspondant au même recouvrement:

$$(H_c^{n-p+1}(U) \oplus H_c^{n-p+1}(V))^* \longrightarrow (H_c^{n-p+1}(U \cap V))^* \longrightarrow (H_c^{n-p}(M))^*$$

$$\longrightarrow (H_c^{n-p}(M))^* \longrightarrow (H_c^{n-p}(U) \oplus H_c^{n-p}(V))^* \longrightarrow (H_c^{n-p}(U \cap V))^* .$$

On peut mettre ces deux suites exactes dans un même diagramme (les applications $\varphi$ sont définies en prenant sur $U$, $V$ et $U \cap V$ l'orientation induite par celle de $M$)

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H^{p-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H^p(M) \arrow[d, "\varphi"] \\
(H_c^{n-p+1}(U) \oplus H_c^{n-p+1}(V))^* \arrow[r] & (H_c^{n-p+1}(U \cap V))^* \arrow[r] & (H_c^{n-p}(M))^*
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^p(M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H^p(U) \oplus H^p(V) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H^p(U \cap V) \arrow[d, "\varphi"] \\
{} \arrow[r] & (H_c^{n-p}(M))^* \arrow[r] & (H_c^{n-p}(U) \oplus H_c^{n-p}(V))^* \arrow[r] & (H_c^{n-p}(U \cap V))^*.
\end{tikzcd}$$

On vérifie que ce diagramme est commutatif (exercice) et on conclut par le Lemme des 5.

□

Par une méthode similaire on démontre le

**Théorème 8.** (Formule de Künneth) *Soient $M$ et $N$ des variétés différentiables, et supposons que $N$ est de type fini. On appelle $p_1$ et $p_2$ les projections canoniques de $M \times N$ sur $M$ et $N$ respectivement et on définit les applications linéaires*

$$H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^{k+l}(M \times N)$$

*par* $[\omega] \otimes [\tau] \mapsto [\omega \wedge \tau]$. *Alors l'application induite*

$$\bigoplus_{k+l=p} H^k(M) \otimes H^l(N) \to H^p(M \times N)$$

*est un isomorphisme pour chaque* $p$.

**Preuve.** On procède par récurrence sur le type minimal de $N$. Si le type minimal de $N$ est 1, le résultat est équivalent au Lemme de Poincaré. Supposons qu'il soit vrai pour toutes les variétés $N$ de type minimal inférieur ou égal à $k-1$ et soit $N$ une variété de type minimal $k$. On écrit une partie de la suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant à un recouvrement ouvert de $N$ donné par le lemme 5:

$$H^{l-1}(U) \oplus H^{l-1}(V) \longrightarrow H^{l-1}(U \cap V) \longrightarrow H^l(N)$$

$$\longrightarrow H^l(N) \longrightarrow H^l(U) \oplus H^l(V) \longrightarrow H^l(U \cap V),$$

puis on tensorise cette suite exacte avec $H^k(M)$ et on prend la somme directe des suites obtenues pour $k+l=p$. Le résultat est une suite exacte (grâce au lemme 2). De plus, il existe des applications linéaires de chaque espace de cette suite exacte vers l'espace correspondant dans la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement ouvert $(M \times U) \cup (M \times V)$ de $M \times N$, et le diagramme ainsi obtenu est commutatif grâce aux propriétés des applications d'image réciproque. L'hypothèse de récurrence nous dit que les deux applications de gauche et les deux applications de droite sont des isomorphismes, donc le Lemme des 5 permet de conclure.

□

## IV. Applications

Si $M$ est une variété compacte orientée de dimension $4k$, la *forme d'intersection* de $M$ est la forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(M)$ définie par

$$([\omega], [\tau]) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \in \mathbb{R}.$$

D'après la dualité de Poincaré, cette forme est non-dégénérée, et sa signature en tant que forme bilinéaire symétrique (c'est à dire la différence entre la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal où la forme est définie positive et la dimension d'un sous-espace vectoriel maximal où la forme est définie négative) s'appelle la *signature* de $M$. La signature est un invariant important de la classe de difféomorphisme des variétés compactes orientées, dont les propriétés (multiplicativité, invariance par cobordisme,...) seront étudiées dans la deuxième partie de ce cours (MAT563).

Avant la signature, les invariants les plus simples de la classe de difféomorphisme des variétés différentiables sont les *nombres de Betti*, définis par

$$\mathrm{b}_i(M) := \dim(H^i(M)).$$

La dualité de Poincaré nous permet aussi d'obtenir des relations entre les nombres de Betti:

**Théorème 9.** *Soit $M$ une variété différentiable compacte et orientée de dimension $n$.*

1. $\mathrm{b}_i(M) = \mathrm{b}_{n-i}(M)$ *quel que soit $i$.*

2. *Si $n = 4k+2$ alors $\mathrm{b}_{2k+1}$ est pair.*

**Preuve.** Le premier point est conséquence immédiate de l'isomorphisme entre $H^i(M)$ et le dual de $H_c^{n-i}(M) = H^{n-i}(M)$.

2. D'après la dualité de Poincaré, l'application

$$([\omega], [\tau]) \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \in \mathbb{R}.$$

est forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée sur $H^{2k+1}(M)$. Une telle forme ne peut exister que sur un espace de dimension paire (exercice).

$\square$