

Fiche de proposition de projet 3A

**Modèles de calculs continus.  
A propos de la puissance des modèles de calcul basés sur les équations  
différentielles ordinaires.**

Olivier Bournez

**Mots-clés :** Calculabilité. Complexité. Calculs par équations différentielles. Modèles de calculs.

**Cours le plus directement relié :** INF412

**Encadrant :** Olivier Bournez.

**Fonction :** Professeur d'Informatique à l' Ecole Polytechnique.

**Téléphone :** +33 (0)1 77 57 80 78

**Mél :** olivier.bournez@lix.polytechnique.fr.

**Www :** <http://www.lix.polytechnique.fr/~bournez>.

### Domaine du travail

La calculabilité et complexité classique concernent les modèles de calculs à temps et espace discrets, ou si l'on préfère les modèles *digitaux*. Cela couvre les modèles et machines actuels de l'informatique digitale, travaillant sur des bits ou des alphabets finis discrets, comme les automates ou machines de Turing. Il y a une très jolie théorie reliée qui est présentée par exemple dans le cours INF412. Cela se relie aussi à des questions de logique.

On peut toutefois considérer des modèles de calculs travaillant sur des quantités continue, comme les réels. Le temps peut être discret, ou continu. Pour ces modèles, l'équivalent d'une thèse de Church-Turing semble envisageable, mais beaucoup moins claire que dans le cas discret.

On se focalisera ici sur le cas du temps continu.

Le General Purpose Analog Computer (GPAC) de Claude Shannon [3] est le premier modèle historique et le plus connu d'un système de calcul continu universel à temps continu. Il a été proposé comme un modèle théorique de l'analyseur différentiel du MIT (une machine mécanique !!) sur lequel Shannon était opérateur. Cela reste en 2017 "le" modèle qui permet de capturer les machines analogiques (construites avec de l'électronique analogique par exemple) que l'on sait construire, comme la machine de Turing est en quelque sorte "le" modèle des machines digitales<sup>1</sup>

Concrètement, on peut montrer que ce modèle correspond aux équations (vectorielles) différentielles (ordinaires) du type  $y' = p(x)$ , où  $p$  est un (vecteur) de polynômes.

Avec plusieurs collègues et étudiants, nous avons démontré qu'il existe une théorie de la **calculabilité** et de la **complexité** pour les modèles à temps continu assez jolie, avec des résultats d'équivalence forts.

En particulier, nous avons montré que l'on pouvait relier ce modèles à la complexité classique, ce qui nous a valu le prix du meilleur article de la conférence ICALP en 2016 (track B).

Début 2017, nous avons démontré qu'il existait une équation différentielle ordinaire universelle : un résultat bien connu et qui paraît très surprenant a été établi par Lee A. Rubel en 1981 : il existe une équation différentielle algébrique d'ordre 4 non-triviale universelle<sup>2</sup>, i.e. telle que pour toute fonction

1. Ici analogique est pris dans le sens de « travaillant avec des quantités continues » par opposition avec digital pris dans le sens « travaillant avec des bits 0 ou 1 ».

2. Contrairement à ce que le mot universalité pourrait laisser penser dans un contexte d'informatique théorique, cette notion d'universalité n'a pas de rapport avec l'universalité des machines de Turing.

positive continue  $\varphi$  sur les réels, et pour toute fonction continue positive  $\epsilon(t)$ , elle possède une solution  $\mathcal{C}^\infty$  avec  $|y(t) - \varphi(t)| < \epsilon(t)$  pour tout  $t$ .

Cependant, si ce résultat paraît surprenant, sa preuve est frustrante et navrante, et est très fortement basée sur le fait que l'équation différentielle algébrique construite n'a pas de solution unique pour toute condition initiale. Lee A. Rubel le reconnaît dans le début de son article et la question de savoir si la solution qui approxime  $\varphi$  peut être unique pour une condition initiale donnée est un problème ouvert célèbre [2, page 2], [1, Conjecture 6.2].

Nous avons résolu cette conjecture et démontré le résultat suivant (en utilisant des techniques de programmation par équations différentielles inspirée du résultat primé à ICALP'2016).

Notre résultat : Il y a un polynôme **fixe**  $p$  à  $d$  variables tel que pour toute fonctions  $f \in C^0(\mathbb{R})$  et  $\epsilon \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ , il existe une condition initiale  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  telle que la solution *unique* de  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  à  $y(0) = \alpha$ ,  $y' = p(y)$  vérifie  $|y_1(t) - f(t)| \leq \epsilon(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Ce résultat ouvre la voie par ailleurs à une mesure de complexité à la Kolmogorov pour les fonctions réelles.

L'objectif du travail sera d'améliorer ce résultat.

Par exemple :

- construire explicitement cette équations différentielle
- minimiser sa dimension
- relier ce résultats à d'autres résultats de la complexité et calculabilité : modèles du deep learning, complexité de Kolmogorov.

Tout cela relève essentiellement de calculabilité, complexité dans l'esprit de INF412, et de programmation classique, nécessite de ne pas être allergique aux équations différentielles (à l'analyse), mais ne nécessite aucune expertise sur ce dernier sujet en dehors des connaissances standards en France à Bac+2.

## Références

- [1] Michael Boshernitzan. Universal formulae and universal differential equations. *Annals of mathematics*, 124(2) :273–291, 1986.
- [2] L. A. Rubel. A universal differential equation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4(3) :345–349, May 1981.
- [3] C. E. Shannon. Mathematical theory of the differential analyser. *Journal of Mathematics and Physics MIT*, 20 :337–354, 1941.