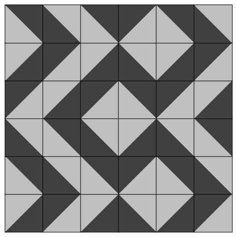
École polytechnique — X2022 — INF412 Fondements de l'informatique

Pavages de Wang

Nous allons ici nous intéresser à la possibilité de paver un plan (ou une portion de celui-ci) avec certaines tuiles, et les liens que cette activité peut avoir avec la logique. On fixe un domaine R qui sera soit le plan $\mathbb{Z}^2$, soit un rectangle borné du plan. On se donne aussi un ensemble fini τ de *tuiles de Wang* : un tuile est un carré de taille 1×1 dont chaque côté est coloré. On cherche à savoir si on peut *paver* le domaine R, c'est-à-dire le couvrir avec des tuiles de telle sorte que deux carrés adjacents aient leurs côtés en contact de la même couleur. On s'autorise à utiliser chaque tuile un nombre arbitraire de fois. Par exemple, si on considère les quatre tuiles , ,  et  on a le pavage du carré 6×6 figuré sur la droite.



1 Des pavages à la logique

On cherche à relier la question de l'existence d'un pavage à celle de l'existence d'un modèle d'une certaine théorie logique. On veut formaliser le cas du pavage du plan $\mathbb{Z}^2$.

Question 1.1. *Sur la signature constituée de quatre symboles de fonctions unaires* n, s, e, w *(pour nord / sud / est / ouest), proposer une théorie égalitaire* $\mathcal{T}$ *qui admet le plan* $\mathbb{Z}^2$ *comme modèle, ou des versions « repliées » de celui-ci. On partira de l'idée que si* x *est une case,* $n(x)$ *représente la case au nord de* x*, et de même pour les autres directions.*

Question 1.2. *Décrire une théorie* $\mathcal{T}'$ *qui écarte les modèles « repliées » de la question précédente.*

Nous allons voir que notre axiomatisation de $\mathbb{Z}^2$ contient nécessairement d'autres modèles (mais ça ne sera pas un problème). Un modèle de la théorie est *connexe* lorsque toute paire d'éléments x et y du domaine, peut être connectée par les fonctions n, s, e, w.

Question 1.3. *Décrire un modèle non connexe de la théorie proposée à la question précédente.*

Question 1.4. *Prouver que toute théorie qui possède le plan* $\mathbb{Z}^2$ *comme modèle, possède aussi des modèles non connexes.*

Question 1.5. *On considère un ensemble fini* τ *de tuiles de Wang. Supposons que l'ensemble des couleurs de ces tuiles soit* $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, c\}$*. On ajoute aux symboles de fonctions précédents* n, s, e, w *des symboles de relations unaires* $C_1, C_2, \ldots, C_c$ *et des symboles de relations unaires* $C'_1, C'_2, \ldots, C'_c$*, dont l'interprétation intuitive est la suivante :*
- $C_i(x)$ *est vraie lorsque la couleur du côté droit de* x *est* i*,*
- $C'_i(x)$ *est vraie lorsque la couleur du côté haut de* x *est* i*.*

Écrire une théorie $\mathcal{T}_\tau$ *qui étend* $\mathcal{T}$ *et code le fait que le domaine du modèle est pavé par les tuiles de* τ*.*

Question 1.6. *Prouver que la théorie* $\mathcal{T}_\tau$ *est consistante si et seulement si* τ *pave le plan* $\mathbb{Z}^2$*.*

On dira qu'un pavage du plan est *périodique* s'il existe deux entiers p et q tels que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$, la tuile en (x_1, x_2) est la même qu'en (x_1+p, x_2) et aussi la même qu'en (x_1, x_2+q).

Question 1.7. *Prouver que la théorie* $\mathcal{T}_\tau$ *possède un modèle fini si et seulement si* τ *peut paver le plan de façon périodique.*

2 Pavabilité du plan

L'objectif de cette sous-section est de démontrer qu'il n'est pas possible de décider si un ensemble τ de tuiles de Wang pave le plan.

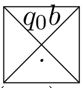
Question 2.1. *Montrer qu'il n'est pas possible de décider si une machine de Turing donnée accepte le mot vide.*

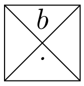
On veut réduire le problème de l'arrêt d'une machine de Turing M sur un ruban vide au problème du pavage du plan : à une machine M donnée, on va associer un ensemble de tuiles. Pour la machine M, on notera

— Γ l'alphabet de travail (avec $b \in \Gamma$ le blanc),

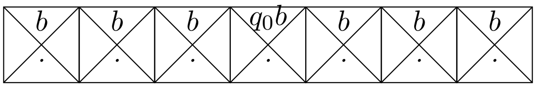
— Q l'ensemble des états (avec q_0 et q_a l'état initial et d'acceptation).

L'ensemble $\mathcal{C}$ des couleurs contiendra ".", Γ et $Q \times \Gamma$, mais on s'autorisera à ajouter d'autres symboles au besoin.

Question 2.2. *Donner une tuile s de la forme* 

et des tuiles de la forme 

de sorte que tout pavage de $\mathbb{Z} \times \{0\}$ avec s à la position $(0,0)$ soit de la forme

…  …

(on demande ici de remplir le triangles vides à gauche et à droite).

Une configuration telles que ci-dessus pourra être vue comme un encodage du ruban blanc, avec la tuile s indiquant la position de la tête de lecture.

Question 2.3. *Donner un ensemble de tuiles, qui contienne celles de la question précédente, de sorte que $\mathbb{Z}^2$ admet un pavage avec s à la position $(0,0)$, si et seulement si la machine M ne s'arrête pas sur le mot vide.*

Question 2.4. *Démontrer que le problème de décision suivant est indécidable :*

— ***entrée*** *: un ensemble fini τ de tuiles de Wang, et une tuile $s \in \tau$,*

— ***question*** *: est-il possible de paver le plan $\mathbb{Z}^2$ avec les tuiles de τ en plaçant la tuile s en $(0,0)$?*

On admettra que le problème reste indécidable même sans imposer la tuile en $(0,0)$.

Question 2.5. *Démontrer que l'on peut paver le plan si et seulement si l'on peut paver tous les carrés de côté fini.*

Question 2.6. *Déduire des résultats précédents qu'il n'est pas vrai que tout pavage du plan avec un nombre fini de tuiles de Wang est obtenu en répétant à jamais un motif périodique.*

Notes bibliographiques

Ce sujet est fondé sur le sujet d'examen de 2013, lui-même fondé sur le document d'habilitation à diriger les recherches de Emmanuel Jeandel, en particulier du chapitre reprenant un article co-écrit avec Alexis Ballier paru dans *"Journées Automates Cellulaires (JAC) 2008"*, sur le cours *"Cellular Automata"* de Jarkko Karri, et enfin sur l'article *"Les dominos de Wang"* de Jean-Jacques Lévy, paru dans Quadrature 82(2011) 1-5.