École polytechnique — X2020 — INF412 Fondements de l'informatique

PC6 notée

Cet énoncé comporte trois parties indépendantes et qui pourront être résolues dans n'importe quel ordre. Dans chaque partie, on pourra, pour répondre à une question, admettre les résultats dont on demande la démonstration aux questions *précédentes*. Il n'est pas nécessaire de traiter toutes les questions pour avoir la note maximale. Les correcteurs vous remercient d'avance d'écrire lisiblement.

1 Ensembles partiellement ordonnés

Dans cette partie, quand on définira une théorie, on prendra soin de bien en spécifier la signature, et de vérifier que les axiomes sont sur cette signature.

On rappelle qu'un *ensemble partiellement ordonné* $(X, \leq)$ est un ensemble X muni d'une relation $\leq$ qui est réflexive, transitive et antisymétrique.

Question 1.1. *Donner une théorie $\mathcal{T}$ dont les modèles égalitaires sont les ensembles partiellement ordonnés.*

Question 1.2. *Donner une théorie dont les modèles sont les ensembles partiellement ordonnés avec un élément maximal.*

Question 1.3. *Est-ce que les formules suivantes sont prouvables dans la théorie $\mathcal{T}$? Justifiez.*

1. $\forall x.\forall y.\forall z.[(x \leq y) \wedge (y \leq z) \wedge (z \leq x)] \Rightarrow x = y$.
2. $\forall x.\exists y.(y \leq x) \wedge \neg(y = x)$.

Question 1.4. *La théorie $\mathcal{T}'$ est obtenue à partir de $\mathcal{T}$ en ajoutant l'axiome*

$$\forall x.\forall z.\neg(x = z) \Rightarrow [\exists y.(x \leq y) \wedge \neg(x = y) \wedge (y \leq z) \wedge \neg(y = z)]$$

Est-elle cohérente ? Justifiez.

Étant donné un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$, une *chaîne* est une suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ finie ou infinie d'éléments de X qui est strictement décroissante

$$x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$$

Question 1.5. *Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, donner une théorie dont les modèles égalitaires sont les ensembles partiellement ordonnés possédant une chaîne de longueur au moins n.*

Un ensemble partiellement ordonné est *bien fondé* lorsqu'il n'admet pas de suite infinie strictement décroissante.

Question 1.6. *Donner une théorie dont les modèle égalitaires sont les ensembles partiellement ordonnés possédant une chaîne de longueur au moins n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette théorie admet un modèle bien fondé.*

Question 1.7. *Montrer qu'il n'existe pas de théorie du premier ordre dont les modèles égalitaires sont les ensembles partiellement ordonnés bien fondés (on pourra supposer que la signature contient des symboles de relations binaires $\leq$ et $=$). Merci de soigner la rédaction de cette question.*

2 Problèmes de décision et machines de Turing

Question 2.1. *Montrer que le problème suivant est décidable : « déterminer si une machine de Turing M est telle que $L(M)$ est reconnu par une (autre) machine de Turing qui accepte en ayant fait autant de déplacements vers la gauche que de déplacements vers la droite ».*

Question 2.2. *Le problème suivant est-il décidable ? semi-décidable ? : « déterminer si une machine de Turing M accepte au moins un mot dont la longueur est un nombre premier ».*

Dans la suite, on pourra se servir du fait, démontré dans le cours, que le problème suivant n'est pas semi-décidable : « déterminer si une machine M et un mot w sont tels que M ne s'arrête pas sur w ».

Question 2.3. *Montrer que le problème suivant est indécidable et non semi-décidable : « déterminer si une machine de Turing M accepte toutes les entrées ».*

Question 2.4. *En déduire que le problème suivant est indécidable et non semi-décidable : « déterminer si deux machines de Turing M et M' sont telles que $L(M) \subseteq L(M')$ ».*

On s'intéresse maintenant à la classe particulière des machines de Turing qui ne se déplacent jamais vers la gauche durant les calculs, c'est à dire qu'à chaque transition la machine reste sur place ou se déplace vers la droite du ruban. On va voir que cette propriété a des conséquences subtiles sur la décidabilité des problèmes.

Question 2.5. *Soit M une machine de Turing et w un mot. On suppose que M accepte w sans jamais se déplacer vers la gauche. Montrer que M accepte un mot w' tel que, pendant le calcul de la machine, la machine ne se déplace jamais vers la gauche et ne se trouve jamais deux fois dans le même état (q, σ) où q est l'état de la machine et σ le symbole sous la tête de lecture.*

Question 2.6. *Montrer que le problème suivant est décidable : « déterminer si une machine de Turing M accepte au moins un mot sans se déplacer vers la gauche ».*

Question 2.7. *Soit L_s un langage semi-décidable et indécidable, M une machine de Turing et w un mot. On pose*

$$\mathcal{L}_{M,w} = \{u : u \in L_s \text{ et } M \text{ accepte } w \text{ en moins de } |u| \text{ étapes } \}.$$

Montrer que $\mathcal{L}_{M,w}$ est reconnu par une machine qui ne se déplace jamais vers la gauche si et seulement si M ne s'arrête pas sur l'entrée w.

Question 2.8. *Montrer que le problème suivant est indécidable et non semi-décidable : « déterminer si une machine de Turing M est telle que $L(M)$ est reconnu par une (autre) machine de Turing qui ne fait pas de déplacements vers la gauche ».*

3 Graphes

Les deux premières questions concernent différentes notions de clôture pour une relation binaire quelconque. Rappelons que la clôture réflexive, la clôture symétrique et la clôture transitive d'une relation R sont les plus petites relations qui contiennent R est qui sont, respectivement, réflexive, symétrique ou transitive.

Question 3.1. *La clôture réflexive et la clôture symétrique d'une relation sont tous les deux exprimable dans la logique du premier ordre, dans le sens où les propositions*

1. *S est la clôture réflexive de R*
2. *S est la clôture symétrique de R*

peuvent être exprimées par des formules du premier ordre sur une signature avec trois symboles de relations binaires $=$, R, et S. Donnez une formule pour chacune.

Question 3.2. *En revanche, la clôture transitive d'une relation n'est pas exprimable dans la logique du premier ordre, dans le sens où la proposition*

3. *S est la clôture transitive de R*

ne peux pas être exprimée par une formule du premier ordre sur une signature avec trois symboles de relations binaires $=$, R, et S. Expliquez pourquoi.

Pour les questions suivantes, on définit un *graphe* comme une paire $G = (V, E)$ d'un ensemble V muni d'une relation $E \subseteq V \times V$. On supposera que V est dénombrable, ce qui revient à supposer $V \subseteq \mathbb{N}$.

On s'intéresse à la notion d'homomorphisme entre graphes : un *homomorphisme* $G \to H$ d'un graphe $G = (V_G, E_G)$ vers un autre graphe $H = (V_H, E_H)$ est une fonction $f : V_G \to V_H$ telle que pour chaque paire d'éléments x et y de V, $(x, y) \in E_G$ implique $(f(x), f(y)) \in E_H$.

On suppose d'abord que l'ensemble V est fini (c'est-à-dire que le graphe G est fini). Se donner G revient à se donner V et E.

Question 3.3. *Montrer que le problème suivant est décidable : « étant donnés deux graphes finis G et H, déterminer s'il existe un homomorphisme $G \to H$ ».*

On suppose maintenant que l'ensemble V est dénombrable mais pas forcément fini. Dans la suite, on suppose que tous les graphes sont décidables : un graphe G est dit *décidable* dans le cas où la relation $(x, y) \in E$ est décidable. Se donner un graphe dénombrable G revient par conséquent à se donner une machine de Turing M_G qui prend en entrée x et y, et qui accepte (respectivement refuse) si $(x, y) \in E$ (respectivement : $(x, y) \notin E$).

Question 3.4. *Montrer que le problème suivant est semi-décidable mais indécidable : « étant donnés un graphe fini G, et un graphe dénombrable H, déterminer s'il existe un homomorphisme $G \to H$ ».*

Question 3.5. *Montrer que le problème suivant est non semi-décidable : « étant donnés un graphe dénombrable G et un graphe dénombrable H, déterminer s'il existe un homomorphisme $G \to H$ ».*