École polytechnique — X2022 — INF412 Fondements de l'informatique

Calculabilité

1 Questions de décidabilité

Parmi les problèmes suivants, lesquels sont décidables, lesquels sont indécidables ? (Argumentez votre réponse.)

Question 1.1. *Déterminer si le langage accepté par une machine de Turing M ne contient que des palindromes (un palindrome est un mot dont l'ordre des lettres reste le même qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche, comme "anna").*

Question 1.2. *Déterminer si une machine de Turing M et un mot w sont tels que M accepte l'entrée w en n'accédant à aucune autre case que celles qui contiennent initialement le mot w.*

Question 1.3. *Déterminer si une machine de Turing M et un mot w sont tels que M accepte l'entrée w en n'utilisant aucune des cases initialement blanches à gauche de celles qui contiennent initialement w.*

2 Décidabilité et langages rationnels

Comme il a été vu à la PC 4, les machines de Turing dont toutes les transitions sont de la forme $\delta(q_1, \ell) = (q_2, \ell, \rightarrow)$ sont classiquement appelées automates finis déterministes (noté DFA pour *deterministic finite automaton*) et les langages qu'elle reconnaissent sont appelés rationnels. Les questions qui suivent abordent ces machines et ces langages du point de vue de la décidabilité.

Question 2.1. *Montrer que le langage $\mathsf{All}_{\mathsf{DFA}} := \{\langle A\rangle \mid A \text{ est un DFA et } L(A) = \Sigma^*\}$ est décidable.*

Question 2.2. *Le problème $\mathsf{Eq}_{\mathsf{DFA}}$ a pour donnée les codages $\langle A\rangle$ et $\langle B\rangle$ de deux DFAs, et consiste à déterminer si $L(A) = L(B)$. Montrer que $\mathsf{Eq}_{\mathsf{DFA}}$ est décidable. [Indication : le complémentaire, l'union et l'intersection de langages rationnels sont rationnels, et les (codages d')automates correspondants sont calculables.]*

Question 2.3. *Montrer que le langage Rat des $\langle M\rangle$ tels que M est une machine de Turing et $L(M)$ est reconnu par un DFA est indécidable. [Indication : le langage $\Lambda = \{0^m 1^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ est un exemple de langage qui n'est pas reconnu par un DFA.]*

Question 2.4. *Si $A \leq_m B$ et B est reconnu par un DFA, est-ce que A est reconnu par un DFA ? Justifier.*

Question 2.5. *Montrer que A est décidable si et seulement si $A \leq_m 0^*1^*$.*

3 Facultatif : unions et intersections de langages

Question 3.1. *Soient A et B deux langages semidécidables (= récursivement énumérables). Montrez que leur union et leur intersection le sont aussi.*

Nous pouvons nous poser la même question concernant des unions et intersections infinies.

Question 3.2. *Soit A_k une famille de langages semidécidables, indexée par $k \in \mathbb{N}$, donnés par une fonction calculable a telle que $a(k)$ désigne le codage de la machine de Turing qui reconnaît A_k. Montrez que leur union est également semidécidable.*

On admettra que l'ensemble suivant n'est pas semidécidable :

$$T = \{x \mid \forall y \text{ La machine de codage } x \text{ termine sur l'entrée } y\}.$$

Question 3.3. *Qu'en est-il d'une intersection infinie de langages semidécidables ?*