École polytechnique — X2022 — INF412 Fondements de l'informatique

Logique du premier ordre

1 Le corps des réels

Le corps $\mathbb{R}$ des réels vérifie les propriétés suivantes :

1. c'est un groupe additif (on appelle 0 son neutre),
2. ...un anneau (on appelle 1 son neutre multiplicatif, on note 2 pour 1+1, etc.),
3. ...un corps,
4. ...muni d'une relation d'ordre total compatible avec les opérations arithmétiques,
5. tout élément positif est un carré,
6. tout polynôme de degré impair a une variable à au moins un zéro.

Question 1.1. *Proposez une signature et, sur le modèle des axiomes présentés en cours pour les propriétés 1 à 3, proposez 6 axiomes permettant d'exprimer la propriété 4. Proposez un axiome permettant d'exprimer la propriété 5.*

Question 1.2. *Exprimez la propriété 6 par un ensemble d'axiomes (potentiellement infini).*

On obtient ainsi une axiomatisation des *corps réels clos*. Mais le corps des réels n'est pas le seul qui vérifie les axiomes que nous avons écrits ! On appelle *réels algébriques* l'ensemble des réels x tels qu'il existe un polynôme P à coefficients entiers tel que $P(x) = 0$. Nous admettrons qu'ils forment un sous-corps de $\mathbb{R}$ (ce n'est pas très difficile à prouver mais cela nous entraînerait hors sujet), dénombrable, et que ce sous-corps est un corps réel clos. Pour garantir d'avoir tous les réels et non seulement les algébriques, on voudrait compléter le système d'axiomes. L'un des axiomes classiques des réels indique le caractère complet pour la topologie (« les suites de Cauchy convergent ») et peut s'exprimer ainsi (les ensembles bornés supérieurement ont un supremum) :

$$\forall X \subseteq \mathbb{R}(X \neq \emptyset \wedge (\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq b) \Rightarrow \\ \exists t \in \mathbb{R}((\forall x \in X, x \leq t) \wedge (\forall b \in \mathbb{R},\ (\forall x \in X, x \leq b) \Rightarrow t \leq b))). \quad (1)$$

Question 1.3. *Cette formule est-elle du premier ordre sur la signature* $(\{0, 1\}, \{+, \times\}, \{=, \leq\})$ *?*

En réalité, une telle axiomatisation des réels est vouée à l'échec. Nous allons tout d'abord montrer ce résultat dans le cas où la signature est dénombrable.

Question 1.4. *Montrer qu'il n'existe pas d'axiomatisation, par des formules du premier ordre sur une signature dénombrable, dont le seul modèle est le corps des réels. On pourra utiliser le théorème de Löwenheim-Skolem.*

Question 1.5. *Montrer que la conclusion du théorème de Löwenheim-Skolem est fausse si l'on ne suppose pas la signature dénombrable.*

2 Corps archimédiens

L'une des propriétés qui caractérise le corps des réels est son caractère *archimédien* :

$$\forall x \exists n, n \in \mathbb{N} \wedge x < n,$$

Question 2.1. *Justifiez pourquoi cette formule n'est pas du premier ordre sur la signature que l'on s'est fixée.*

On pourrait être tenté de définir un prédicat unaire (appelons-le `entier`), pour exprimer le fait qu'un réel est un entier. La formule précédente deviendrait donc

$$\forall x \exists n, \texttt{entier}(n) \wedge x < n,$$

ce qui est bien dans notre nouvelle signature.

Question 2.2. *Proposez des axiomes pour* `entier`*. Soit $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ un modèle de cette théorie construit à partir de $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ qui interprète* `entier` *par $E \subseteq \mathbb{R}$, montrez que nécessairement $E = \mathbb{N}$.*

Question 2.3. *À votre avis, le corps des réels est-il le seul modèle ?*

3 L'impossible caractérisation des réels au premier order

Nous allons maintenant montrer que, même avec une signature non-dénombrable, le résultat persiste. L'objectif de cet exercice est de montrer le résultat suivant :

Théorème. *Il n'existe pas d'ensemble d'axiomes du premier ordre caractérisant le corps des réels à isomorphisme près.*

Supposons donc par l'absurde qu'il existe une telle axiomatisation du corps des réels ordonné, c'est-à-dire une signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ avec $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{C}$, $\{+, \cdot\} \subseteq \mathcal{F}$ et $\{=, <\} \subseteq \mathcal{R}$, ainsi qu'un ensemble d'axiomes $\mathcal{A}$ sur Σ qui caractérise $\mathbb{R}$ à isomorphisme près. Plus précisément, $\mathbb{R}$ est l'ensemble de base d'une structure $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$ sur Σ, qui interprète $0, 1, +, \cdot, =, <$ de manière standard et qui satisfait $\mathcal{A}$, et toute autre structure sur Σ qui satisfait $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$.

Question 3.1. *Donnez une théorie $\mathcal{A}^+$ qui contienne $\mathcal{A}$ (on s'autorisera à étendre la signature, mais pas à utiliser* `entier`*) et dont les modèles sont des corps réels ordonnés qui ne sont pas archimédiens.*

Question 3.2. *Montrez que $\mathcal{A}^+$ possède un modèle ${}^\star\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}$. [Indication : utiliser le théorème de compacité, qui est vrai pour toute signature, dénombrable ou pas.]*

Question 3.3. *Déduisez-en le Théorème.*

Question 3.4. *Proposez une construction explicite d'un corps réel ordonné, qui contienne $\mathbb{R}$ et qui ne soit pas archimédien. [Précision : on n'impose pas que ce corps soit clos, comme l'est $\mathbb{R}$.]*